Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel **SS 2023**

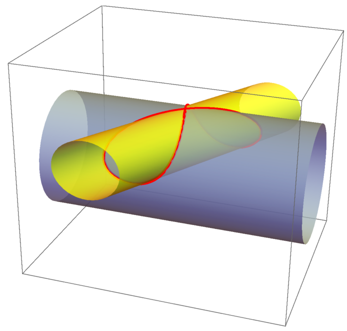
Analysis 2

Übungsblatt 12

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist **Donnerstag, der 6.7., um 12:00** Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1. Wir betrachten die Schnittmenge der Zylinder

$$Z_1 := \left\{(x,y,z) : \, y^2 + z^2 = 4\right\},$$
$$Z_2 := \left\{(x,y,z) : \, \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y\right)^2 + (z-1)^2 = 1\right\}.$$



(a) Kann man diese Schnittmenge in einer Umgebung von $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 2, 0\right)$ lokal schreiben als

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = g(x)$$

mittels einer Funktion $g : \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - \varepsilon, \frac{2}{3}\sqrt{3} + \varepsilon\right) \to \mathbb{R}^2$?

(b) Kann man diese Schnittmenge in einer Umgebung von $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 2, 0\right)$ lokal schreiben als

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = g(y)$$

mittels einer Funktion $g : (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$? Kann man die Schnittmenge explizit berechnen?

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Seien $(x,y) := (x_1, x_2, y_1, y_2)$ Vektoren im $\mathbb{R}^4$. Zeigen Sie mit dem Satz über implizite Funktionen, dass man das Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 - y_1^2 - y_2^2 + 96 = 0,$$
$$-x_1^3 - x_2 + 5y_1 - y_2 - 10 = 0,$$

lokal um $(x_0, y_0) = (0, 1, 4, 9)$ in der Form $y = g(x)$ schreiben kann und bestimmen Sie die Gradienten von y_1 und y_2 (als Funktion von x) an $x_0 = (0, 1)$.

Aufgabe 3. Die Menge

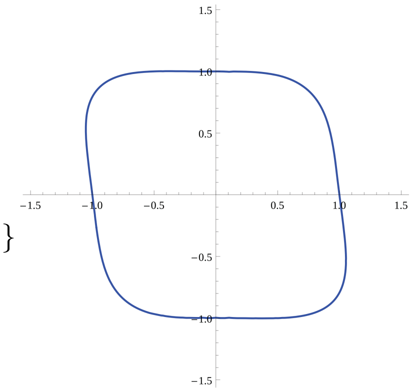
$$W := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^4 + \frac{1}{2}x^3y + y^4 = 1\right\}$$

kann man mittels zweier Funktionen $f_1 \geq f_2$ folgendermaßen beschreiben:

$$W = \{(x, f_1(x)) :\ x_0 \leq x \leq x_1\} \cup \{(x, f_2(x)) :\ x_0 \leq x \leq x_1\}$$

(a) Berechnen Sie x_0 und x_1.

(b) Die Punkte $(0,1)$ und $(\frac{1}{2}, -1)$ liegen in der Menge W. Berechnen Sie $f_1'(0)$ und $f_1''(0)$, sowie $f_2'(\frac{1}{2})$ und $f_2''(\frac{1}{2})$.



Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) = x^4 + 2x\cos y + \sin z.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ für genügend kleine x, y, z nach z aufgelöst werden kann und berechnen Sie für die Lösungsfunktion $z(x,y)$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Aufgabe 5 (5 Punkte)**.** Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = xy,$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2.$$

Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.

Aufgabe 6. Berechnen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y) = x^4 + y^4$ auf der Einheitssphäre

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie das Minimum und das Maximum der Funktion

$$f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 \text{ auf } K = \left\{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie den Rand und das Innere von K getrennt.

Aufgabe 8. Berechnen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y,z) = (x+y)z$ auf der Einheitssphäre

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2$$

auf dem Ellipsoid

$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1\right\}.$$