Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel

SS 2023

Analysis 2

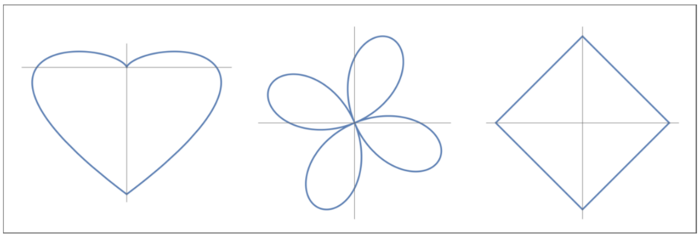
Übungsblatt 2

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 20.4., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: Welche Spur gehört zu welcher Kurve?

$$f:\ [0,2\pi]\to\mathbb{R}^2 \qquad g:\ [0,2\pi]\to\mathbb{R}^2 \qquad h:\ [-1,1]\to\mathbb{R}^2$$

$$f(t)=\begin{pmatrix}\sin t-\cos 3t\\ \sin 3t-\cos t\end{pmatrix} \qquad g(t)=\begin{pmatrix}\cos t|\cos t|\\ \sin t|\sin t|\end{pmatrix} \qquad h(t)=\begin{pmatrix}t^3-t^5\\ \frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t^4\end{pmatrix}$$



Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)**:** Zeigen Sie, dass für u, v, $w\in\mathbb{R}^3$ gilt:

(a) $u\times v=-v\times u$.

(b) $u\times(v\times w)\neq(u\times v)\times w$.

(c) $u\cdot(v\times w)=(u\times v)\cdot w$

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)**:** Die gewöhnliche Zykloide lässt sich für $R>0$ in der Parameterform

$$f(t)=\begin{pmatrix}R(t-\sin t)\\ R(1-\cos t)\end{pmatrix}$$

darstellen.

(a) Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve in Abhängigkeit vom Parameter t.

(b) Wo im Periodenintervall $0\leq t\leq 2\pi$ ist der Krümmungsradius ρ am größten? Bestimmen Sie den zugehörigen Krümmungskreis.

Aufgabe 4: Die Kurve $f:\ [0,3]\to\mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ \frac{2}{3}t^{3/2}\end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Bogenlänge.

(b) Berechnen Sie die Krümmung.

Aufgabe 5 (3+0 Punkte)**:**

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $k \in [0,1]$ das uneigentliche Integral

$$E(k) := \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

existiert.

(b) Drücken Sie die Bogenlänge der Ellipse

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$$

mit den Halbachsen $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b > 0$ mit Hilfe von $E(k)$ aus.

Aufgabe 6 (2+1+3 Punkte)**:** Sei $r, c, > 0$ und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

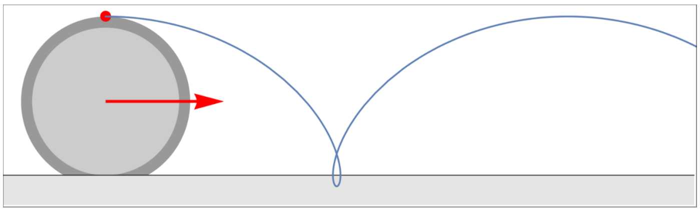
$$\gamma(t) = (r\cos t,\, r\sin t,\, ct).$$

(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit γ' und die Beschleunigung γ'' von γ.

(b) Bestimmen Sie eine Reparametrisierung δ der Kurve γ nach der Bogenlänge.

(c) Bestimmen Sie die Krümmung von δ.

Aufgabe 7: Ein Zugrad bewegt sich wie im Bild mit konstanter Geschwindigkeit v nach rechts. R_1 bezeichne den Innenradius (Lauffläche des Rads) und R_2 den Außenradius.



Bestimmen Sie die Kurve des roten Flecks am Rand des Rades in Abhängigkeit von der Zeit t, wobei der Fleck bei $t = 0$ wie im Bild oben steht

Aufgabe 8: Die Kurve $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$z(t) = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

wird als Zykloide bezeichnet (vgl. Aufgabe 3). Beweisen Sie, dass die Evolute dieser Zykloide eine verschobene Zykloide ist (mit Ausnahme der singulären Stellen).