Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel

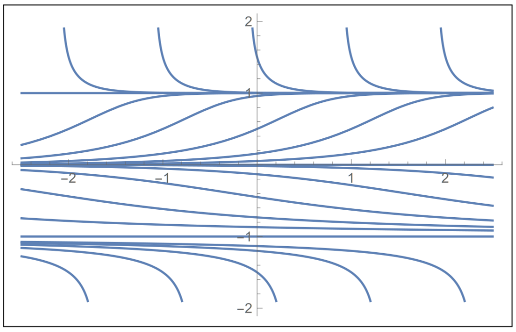
SS 2023

Analysis 2

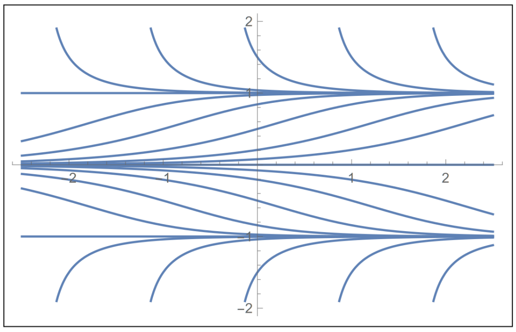
Übungsblatt 3

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 27.4., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

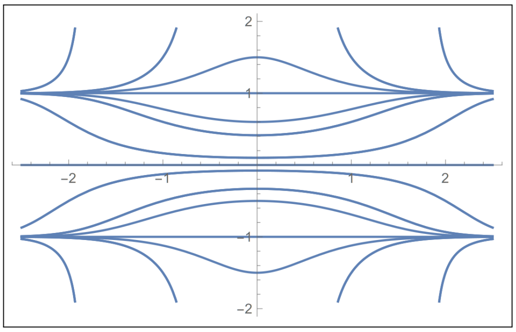
Aufgabe 1: Welche Lösungsskizze gehört zu welcher Differentialgleichung?



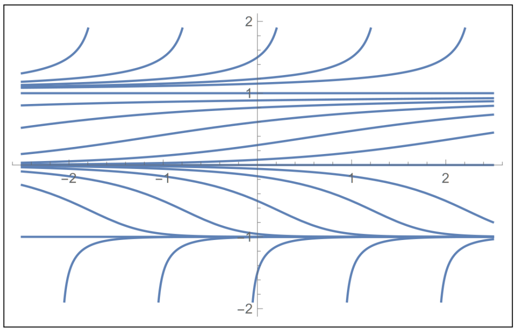
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

(a) $x'(t) = (1 - x(t))(1 + x(t))x(t)$,

(b) $x'(t) = t(1 - x(t))(1 + x(t))x(t)$,

(c) $x'(t) = (1 - x(t)^2)(1 + x(t))x(t)$,

(d) $x'(t) = (1 - x(t))^2(1 + x(t))x(t)$.

Aufgabe 2: Prüfen Sie jeweils, ob die Differentialgleichung linear ist.

(a) $u'(x) = f(x)u(x)$,

(b) $t'(x) = t(x) + x^2$,

(c) $v''(t) + v'(t) + v(t) = v(t)^2$,

(d) $a''(s) = \exp(a(s))$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**:** Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichungen

(a) $x'(t) = -3x(t) + \cos t$,

(b) $x'(t) = x(t) - \frac{1}{t^2}, \quad t > 0$.

Hinweis: Die Integrale müssen nicht ausgerechnet werden, vereinfachen Sie soweit wie möglich.

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Lösungen von:

(a) $a'(x) = 2a(x) + x$,

(b) $b'(x) = b(x) + xe^{2x}$.

Wir erlauben nun auch Funktionen als Lösung, die differenzierbar sind mit Ausnahme von einzelnen Stellen, die jedoch überall stetig sind. Berechnen Sie dann die Lösungen von:

(c) $c'(x) = -\operatorname{sign}(c(x) - x)$,

(c) $d'(x) = 1 - 2\operatorname{sign}(d(x))$.

Aufgabe 5 (3+4 Punkte)**:** Sei P_c eine (Halb-)Parabelnschar definiert durch

$$P_c = \{(x, y) : \ y = cx^2 \text{ mit } c, x, y \in \mathbb{R}, c, x, y > 0\}$$

(a) Bestimmen Sie eine Differentialgleichung

$$y' = f(x, y), \quad x, y > 0,$$

deren Lösungen genau die Parabeln P_c sind.

(b) Stellen Sie eine Differentialgleichung der Orthogonal-Trajektorien zur Schar P_c, d.h. Funktionsschar mit Elementen orthogonal zu den Elementen von P_c, auf und löse Sie diese.

Aufgabe 6 (3+3 Punkte)**:** Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungssysteme

(a)

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t),$$

(b)

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)**:** Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $y(t) = \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{pmatrix} x(t)$ und die Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$