Prof. Dr. Guido Sweers **SS 2023**
Dr. Aleksey Sikstel

Analysis 2

Übungsblatt 4

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 4.5., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: Sei $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\exp(tA_k)$ für

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$ b) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (3+0 Punkte)**:** Bestimmen Sie allgemeine Lösungen zu den folgenden Differentialgleichungen

(a) $y'' - 4y' + 4y = 0$,

(b) $y''' - 2y'' + 2y' - y = 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**:** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x'' - 2x' + 2x = e^{2t} \sin t, \quad x(0) = 3/5, \quad x'(0) = 1.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)**:** Zeigen Sie, dass

$$H_n(t) := (-1)^n e^{t^2} \left(\frac{d}{dt}\right)^n e^{-t^2}$$

ein Polynom n-ten Grades ist und die Hermitesche Differentialgleichung mit Parameter $n \in \mathbb{N}$ löst:

$$x''(t) - 2tx'(t) + 2nx(t) = 0.$$

Hinweis: Induktion.

Aufgabe 5: Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

(b) Ermitteln Sie eine invertierbare Matrix $T \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$, so dass $T^{-1}AT$ eine Jordan-Matrix ist.

(c) Berechnen Sie $\exp(tA)$.

(d) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$.

(e) Prüfen Sie, ob das System $x'(t) = Ax(t)$ stabil ist. Falls ja, prüfen Sie auch, ob das System asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 6: Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} & \text{für } t \geq 0 \\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Aufgabe 7 (5+2 Punkte)**:**

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x' &= y + z, \\ y' &= x + z, \\ z' &= x + y, \end{aligned}$$

mit $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$.

(b) Untersuchen Sie die Stabilität des Systems.

Aufgabe 8: In den Bildern sind Lösungskurven $(x(t), y(t))$ der Gleichung $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ für vier verschiedene Funktionen f skizziert. Ordnen Sie die Bilder den dazugehörigen Funktionen zu:

(a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x^2-y^2)x - y \\ x + (1-x^2-y^2)y \end{pmatrix}$

(b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x \end{pmatrix}$

(c) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix}$

(d) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| - |y| \\ |x| + |y| \end{pmatrix}$