**Prof. Dr. Guido Sweers**
**Dr. Aleksey Sikstel** **SS 2023**

# Analysis 2

## Übungsblatt 5

---

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 11.5., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

---

**Aufgabe 1:** Von welchem Typ sind die folgenden Differentialgleichungen?

(a) $a'(x)a(x)(x^2+1) = e^x$,

(b) $b'(x) + b(x) + (x^2+1) = e^x$,

(c) $c'(x) + x + (c(x)^2+1) + e^x$,

(d) $a'(x)(x^2+1) = e^{x+a(x)}$.

Geben Sie auch die zugehörigen Lösungsansätze an.

**Aufgabe 2:** Sind die folgenden Differentialgleichungen trennbar?

(a) $x'(t) = \exp(tx(t))$

(b) $x'(t) = \exp(t + x(t))$

(c) $x'(t) = \min\left\{\dfrac{x(t)^2}{t^2}, t^2, t^{-2}, t^2x(t)^2\right\}$

(d) $x'(t) = \ln(x(t)) - tx(t)$

**Aufgabe 3** (2+3 Punkte)**:** Berechnen Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGL:

(a) $x'(t) + \dfrac{x(t)}{t+1} = e^{-t}$,

(b) $x'(t) + 4tx(t) = 4te^{-2t^2}$.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**:** Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$x'(t) - \tanh(t)x(t) = 2\cosh^2(t), \quad x(0) = 10.$$

**Aufgabe 5** (4 Punkte)**:** Bestimmen Sie die allgeimene Lösung der folgenden homogenen DGL:

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t} + \frac{1}{\sin\left(\frac{x(t)}{t}\right)}, \quad t > 1,\ x \in (0, \pi).$$

**Aufgabe 6** (3+4 Punkte)**:** Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $x'(t) + \left(\dfrac{1}{1+t}\right)x(t) + (1+t)(x(t))^4 = 0, \quad x(0) = -1,$

(b) $x'(t) + \dfrac{2t+1}{t}x(t) - \dfrac{1}{t}(x(t))^2 = t+2, \quad x(1) = 0.$

**Aufgabe 7:** Wir betrachten die DGL

$$x'(t) = x(t)^2 \cos(t).$$

Welche Behauptungen sind richtig?

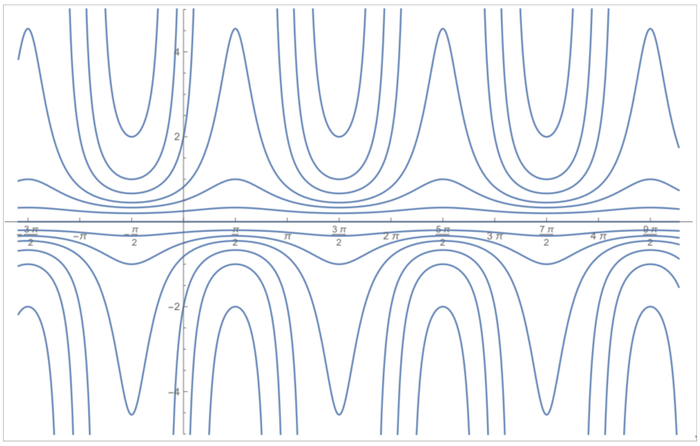

Abbildung 1: Skizze einiger Lösungen

(a) Für $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ ist $x\colon (\alpha, \pi - \alpha) \to \mathbb{R}$ mit $x(t) = \frac{1}{\sin(\alpha) - \sin(t)}$ eine Lösung dieser Gleichung mit maximalem Existenzintervall.

(b) Für $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ ist $x\colon (-\pi - \alpha, \alpha) \to \mathbb{R}$ mit $x(t) = \frac{1}{\sin(\alpha) - \sin(t)}$ eine Lösung dieser Gleichung mit maximalem Existenzintervall.

(c) Alle Lösungen dieser Gleichung haben die Vorschrift $x(t) = \frac{1}{c - \sin(t)}$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

(d) Alle Lösungen dieser Gleichung haben die Vorschrift $x(t) = \frac{c}{1 - c\sin(t)}$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

(e) Alle Lösungen dieser Gleichung, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, kann man schreiben mittels $x(t) = \frac{1}{c - \sin(t)}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|c| > 1$.

**Aufgabe 8:** Geben Sie eine Familie von Trajektorien $\{\mathcal{B}_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ an, so dass $\{\mathcal{B}_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ und $\{\mathcal{A}_c\}_{c\in\mathbb{R}^+}$, definiert durch

$$\{\mathcal{A}_c\}_{c\in\mathbb{R}} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y^3 + x + \frac{x^3}{3} = c\right\},$$

orthogonole Familien von Trajektorien sind.