Prof. Dr. Guido Sweers **SS 2023**
Dr. Aleksey Sikstel

Analysis 2

Übungsblatt 6

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist **Freitag, der 19.5., um 10:00 Uhr**.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: Geben Sie, sofern möglich, eine kleinste offene und eine kleinste abgeschlossene Menge an, die die folgende Menge enthält.

(a) in $\mathbb{R}$: $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

(b) in $\mathbb{R}$: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R} : 2^{-2n} < x < 2^{1-2n}\}$,

(c) in $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$,

(d) in $\mathbb{R}$: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(q_n - 2^{-n-3}, q_n + 2^{-n-3})$, wobei $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$ ist.

(e) in $\mathbb{R}$: $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{2^{-n}}(\frac{1}{n}, 0)$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie $\overline{A}$, A° und ∂A in $\mathbb{R}^2$ für

$$A := \Big(B_1(0,0) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)\Big) \cup \left\{\left(0, \frac{2n}{n+m}\right) : n, m \in \mathbb{N}^+\right\}.$$

Aufgabe 3: Zeigen Sie für $A \subset \mathbb{R}^n$: $\partial A = \overline{A}\backslash A^\circ = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \partial A^c$.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)**:** Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beliebige Mengen. Gelten dann die folgenden Aussagen?

(a) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann offen, wenn $A \cap \partial A = \emptyset$.

(b) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\partial A \subset A$.

(c) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5: Sei $A, B \subset \mathbb{R}^n$ und $A \subset B$. Gilt die folgende Aussage: A ist offen in B genau dann, wenn zu jedem $x \in A$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit $B \cap U \subset A$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (2+2 Punkte)**:** Untersuchen Sie jeweils, ob $f(x, y)$ für $(x, y) \to (0, 0)$ konvergiert und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$,

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Aufgabe 7 (3+3 Punkte)**:** Welche der folgenden Funktionen sind an der Stelle $(0,0)$ stetig?

(a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} (1+|xy|)^{\frac{1}{x^2+y^2}} & , \text{ falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & , \text{ falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}\sin(x-y) & , \text{ falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & , \text{ falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Aufgabe 8 (4 Punkte)**:** In der Vorlesung (Beispiele 6.6 und 6.7) untersuchten wir bereits die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \in A_\alpha := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| < x^\alpha\} \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

mit $\alpha = 2$. Auf welchen Gebieten A_α, also für welche $\alpha > 0$ ist f stetig bzw unstetig?

Aufgabe 9: Betrachte für $p \in (0,4)$ und $f_p(x) := px(1-x)$ die Folge $\mathcal{F}_p := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{10} \\ x_{n+1} = f_p(x_n) & \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Für $p < 1$ ist 0 der einzige Häufungspunkt von $\mathcal{F}_p$. Dies gilt auch für $p = 1$.

(b) Für $1 < p < 3$ ist $x = 1 - \frac{1}{p}$ der einzige Häufungspunkt von $\mathcal{F}_p$. Dies gilt auch für $p = 3$.

(c) Für $3 < p < 4$ hat $\mathcal{F}_p$ mehrere Häufungspunkte.

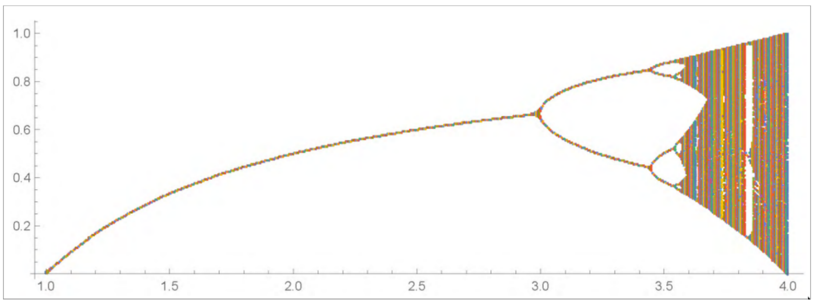

Abbildung 1: Häufungspunkte in Abhängigkeit von p.