Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel **SS 2023**

Analysis 2

Übungsblatt 7

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 25.5., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1 (3 Punkte)**:** Sei ℓ_∞ der Vektorraum aller beschränkten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell_\infty} := \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

eine Norm auf ℓ_∞ definiert.

Aufgabe 2: Sei $f_n : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = (1 - x_1)^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_{k+1}}{k} - \frac{x_k}{k+1} \right)^2.$$

Wir betrachten die Funktion $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f wohldefiniert auf ℓ_∞ ist.
Hinweis: f ist auf ℓ_∞ wohldefiniert, wenn $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in \ell_\infty$ konvergiert.

(b) Ist f auch auf ℓ_2 wohldefiniert? Und auf ℓ_1?

(c) Zeigen Sie, dass f ein Minimum in ℓ_∞ hat.

(d) Zeigen Sie, dass $\inf\{f(x) : x \in \ell_1\} = 0$.

(e) Hat die Funktion f ein Minimum in ℓ_1?

(f) Hat die Funktion f ein Minimum in ℓ_2?

Aufgabe 3 (5 Punkte)**:** Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $A := [0, 1]$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(b) $A := [0, 1)$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(c) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist $\{x\}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

(d) $A := \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

(e) Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, so ist für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\varepsilon > 0$, die abgeschlossene Kugel $\overline{B_\varepsilon(x)}$ um x mit Radius ε eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**:** Bestimmen Sie die Nullstellenmenge der Funktion

$$f:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}:\, f(x,y) = (x^2+y^2-\sqrt{2})(4x^2-y^2)\left(\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)+3\right)$$

und zeigen Sie damit, dass f mindestens 4 Extrema besitzt.

Aufgabe 5: Seien V, W normierte Vektorräume und $f:\, V \to W$ eine stetige Funktion. Gilt für $A \subset V$ folgendes?

(a) A ist abgeschlossen in V $\Rightarrow$ $f(A)$ ist abgeschlossen in W.

(b) $f(A)$ ist abgeschlossen in W $\Rightarrow$ A ist abgeschlossen in V.

(c) A ist kompakt in V $\Rightarrow$ $f(A)$ ist kompakt in W.

(d) $f(A)$ ist kompakt in W $\Rightarrow$ A ist kompakt in V.

(e) A ist zusammenhängend in V $\Rightarrow$ $f(A)$ ist zusammenhängend in W.

(f) $f(A)$ ist zusammenhängend in W $\Rightarrow$ A ist zusammenhängend in V.

Aufgabe 6: Die abgeschlossene Einheitskugel in ℓ_1 ist

$$\overline{B_1(0)} = \{x \in \ell_1 :\, \|x\|_1 \leq 1\}.$$

Finden Sie eine Folge in $\overline{B_1(0)}$, die keine konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 7: Wir betrachten ℓ_2. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $\{x \in \ell_2 :\, \|x\|_x \leq 1\}$ abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt ist.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**:** Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge und $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{\|x-y\| :\, y \in A\} \subset \mathbb{R}$ ein Minimum besitzt.

Aufgabe 9: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.

(a) Sei $A \subset V$ mit $A \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass die Abstandsfunktion zu A

$$d(x,A) := \inf\{\|x-a\| :\, a \in A\}$$

eine (bzgl. x) stetige Funktion ist.

Sei nun $K \subset V$ kompakt und $\{U_1, \ldots, U_m\}$ eine endliche Überdeckung von K durch offene, nichtleere Mengen in V. Zeigen Sie:

(b) Die Funktion $\tilde{d}(x) := \max\{d(x, \partial U_1), \ldots, d(x, \partial U_M)\}$ ist stetig.

(c) Es gilt $\tilde{d}(x) > 0$ für alle $x \in K$.

(d) Es gibt ein $r > 0$, sodass jede Kugel $B_r(x)$ für $x \in K$ in einer der Mengen U_i liegt.

Aufgabe 10 (5 Punkte)**:** Seien $n,\, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$. Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\mathbb{R}^n \backslash (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ zusammenhängend?