Prof. Dr. Guido Sweers **SS 2023**
Dr. Aleksey Sikstel

Analysis 2

Übungsblatt 8

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist **Freitag, der 9.6., um 10:00** Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1 (2+2+2+1 Punkte)**:** Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeige, dass f stetig ist.

(b) Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)$ und $\frac{\partial}{\partial y} f(0,0)$?

(c) Existiert $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f(0,0)$ und $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)$?

(d) Hat f ein Minimum in $(0,0)$?

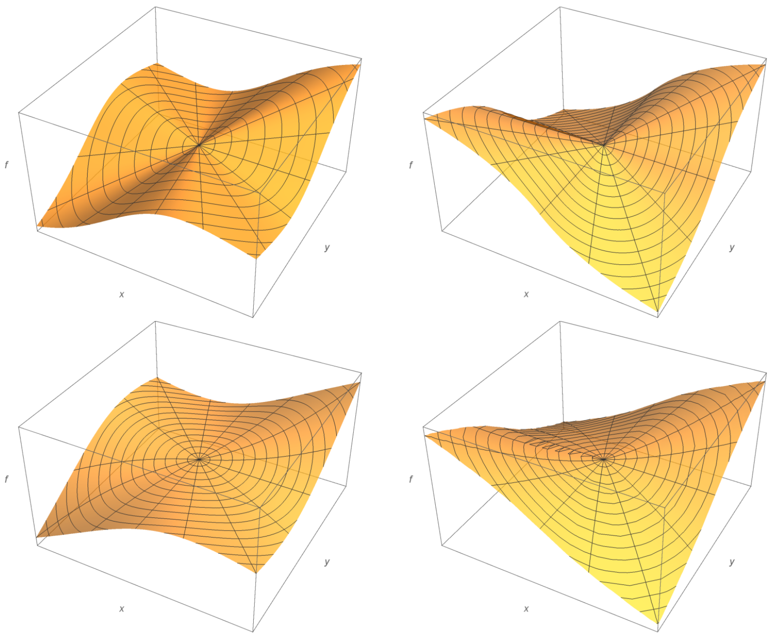
Aufgabe 2: Welche Vorschrift gehört zu welcher skizzierten Funktion?

(a) $f_1(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{|x| + |y|}}$

(b) $f_2(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(c) $f_3(x,y) = \dfrac{xy(x+y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(d) $f_4(x,y) = \dfrac{xy(x+y)}{x^2 + y^2}$



Aufgabe 3 (2+3+2 Punkte)**:** Sei

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2 y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist

(b) Berechnen Sie in jedem Punkt die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ von f.

(c) Sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ im Punkt $(0,0)$ stetig?

Aufgabe 4: Berechnen Sie $\partial_x \partial_y f(0,0)$ und $\partial_y \partial_x f(0,0)$ für die Funktion $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert als

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)**:** Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen:

(a) $f:\ \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto \dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$,

(b) $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3 - y^3 + 3axy$ für $a \neq 0$.

Aufgabe 6 (2 Punkte)**:** Sei $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2 + 5xy + 3y^2$ und $v := \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\partial_v f(a)$ existiert und berechnen Sie diese.

Aufgabe 7: Sei $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in \mathbb{Q} \text{ oder } y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ partiell differenzierbar, aber nicht stetig ist.

Aufgabe 8: Seien $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen. Wir definieren

$$h(x) := f(\exp(x),\ xg(x^2)).$$

(a) Zeigen Sie, dass h differenzierbar ist.

(b) Geben Sie eine Formel für die Ableitung $h'(x)$ an.

(c) Geben Sie ausreichende Bedingungen für f und g derart an, dass h zweimal differenzierbar ist.