Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel **SS 2023**

Analysis 2

Übungsblatt 9

Die Lösungen müssen in den grauen Briefkasten im Innenhof des MI geworfen werden. Abgabeschluss ist **Donnerstag, der 15.6., um 10:00** Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: Wir definieren

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x\sqrt{y})}{x\sqrt{y}} & \text{wenn } x^2y > 0, \\ 1 & \text{wenn } x^2y = 0, \\ \frac{\sinh(x\sqrt{-y})}{x\sqrt{-y}} & \text{wenn } x^2y < 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte)**:** Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{wenn } x > 0 \text{ und } y > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar nach y ist auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar nach x ist auf $\mathbb{R}^2$ außer für $(0, y)$ mit $y > 0$.

(c) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist auf $\mathbb{R}^2$ außer für $(0, y)$ mit $y \geq 0$.

(d) Die Richtungsableitungen existieren in jede Richtung u und für alle Stellen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Es gibt jedoch Richtungen u derart, dass.

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot u.$$

Finden Sie solche Richtungen.

Aufgabe 3: Wahr oder falsch? Begünden Sie Ihre Antworten.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x, y \in \mathbb{R}$ ein

$$\xi \in \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}, \text{ so dass } f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x).$$

(b) Sei $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x, y \in \mathbb{R}$ ein

$$\xi \in \{tx + (1-t)y :\ t \in [0,1]\}, \text{ so dass } f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x).$$

(c) Sei $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x, y \in \mathbb{R}^n$ ein

$$\xi \in \{tx + (1-t)y :\ t \in [0,1]\}, \text{ so dass } f(y) - f(x) = \nabla f(\xi) \cdot (y-x).$$

Aufgabe 4: Sei $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 3x^2y + y^3$.

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix $H_f(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie alle (x,y), für die die $H_f(x,y)$ positiv definit ist.

(c) An welchen Stellen ist H_f indefinit?

Aufgabe 5 (3+3 Punkte)**:** Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

(a) $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) \mapsto (4x^2 + y^2)\exp(-x^2 - 4y^2)$.

(b) $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) \mapsto x^4 - 2x^2y^2z + 4y + 2z$.

Aufgabe 6 (3+3 Punkte)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f = (f_1, f_2, f_3):\ U \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Wir definieren:

- Die **Divergenz** $\operatorname{div}:\ U \to \mathbb{R}$ von f als

$$\operatorname{div} f(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x)$$

  und manchmal auch geschrieben als $\operatorname{div} f(x) = \nabla \cdot f(x)$.

- Die **Rotation** $\operatorname{rot}:\ U \to \mathbb{R}^3$ von f als

$$\operatorname{rot} f(x) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x),\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\right).$$

  und manchmal auch geschrieben als $\operatorname{rot} f(x) = \nabla \times f(x)$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $\varphi:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt: $\quad \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$.

(b) Sei $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt: $\quad \operatorname{div}\operatorname{rot} f = 0$.

Aufgabe 7: Wahr oder falsch?

(a) Wenn A und B positiv definit sind, dann ist auch $A + B$ positiv definit.

(b) Wenn A positiv definit und B negativ definit ist, dann kann $A + B$ nicht positiv definit sein.

(c) Wenn A positiv definit und B negativ definit ist, dann ist $A + B$ indefinit.