Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Dr. Michael Kühn

WS 2017/2018

Analysis 3

Übungsblatt 0

Dieses Übungsblatt ist unbepunktet, muss nicht abgegeben werden und wird in der zweiten Vorlesungswoche besprochen.

Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie, dass das Volumen der Einheitskugel $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| < 1\}$ in $\mathbb{R}^3$ durch das folgende Integral gegeben ist:

$$\operatorname{Vol}(B_1(0)) = \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - z^2\right) dz.$$

(b) Begründen Sie, dass das Volumen der Kugel $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| < R\}$ in $\mathbb{R}^3$ mit Radius R wie folgt gegeben ist:

$$\operatorname{Vol}(B_R(0)) = R^3 \operatorname{Vol}(B_1(0)).$$

(c) Begründen Sie, dass für den Flächeninhalt der Sphäre $S_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = R\}$ in $\mathbb{R}^3$ mit Radius R folgendes gilt:

$$\operatorname{Fl}(S_R(0)) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\operatorname{Vol}(B_{R+\varepsilon}(0)) - \operatorname{Vol}(B_R(0))}{\varepsilon}.$$

(d) Berechnen Sie $\operatorname{Vol}(B_R(0))$ und $\operatorname{Fl}(S_R(0))$.

Aufgabe 2: Seien $R, a, b \in \mathbb{R}^+$. Wahr oder falsch?

(a) Wenn die Kreisscheibe $\{(x,y); x^2 + y^2 \leq R^2\}$ Flächeninhalt πR^2 hat, so ist der Umfang des Kreises gleich

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\pi (R+\varepsilon)^2 - \pi R^2}{\varepsilon} = 2\pi R.$$

(b) Wenn die elliptische Scheibe $\{(x,y); \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\}$ Flächeninhalt πab hat, so ist der Umfang der Ellipse gleich

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\pi (a+\varepsilon)(b+\varepsilon) - \pi ab}{\varepsilon} = \pi (a+b).$$

Aufgabe 3: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt offen, wenn es für alle $a \in A$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart gibt, dass $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$.
Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt offen, wenn es für alle $b \in B$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart gibt, dass $\{x \in \mathbb{R}^2; \|x-b\| < \varepsilon\} \subset B$.

(a) Zeigen Sie, dass $B \subset \mathbb{R}^2$ genau dann offen ist, wenn es für alle $b \in B$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt, dass $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; |x_1 - b_1| + |x_2 - b_2| < \varepsilon\} \subset B$.

(b) Sei $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die erste bzw. zweite Koordinate. Wahr oder falsch?

- Wenn $B \subset \mathbb{R}^2$ offen ist, dann sind $p_1(B)$ und $p_2(B)$ offen in $\mathbb{R}$.
- Wenn $p_1(B)$ und $p_2(B)$ offen in $\mathbb{R}$ sind, dann ist $B \subset \mathbb{R}^2$ offen in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4:

(a) Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A, B gilt

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \qquad \text{und} \qquad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

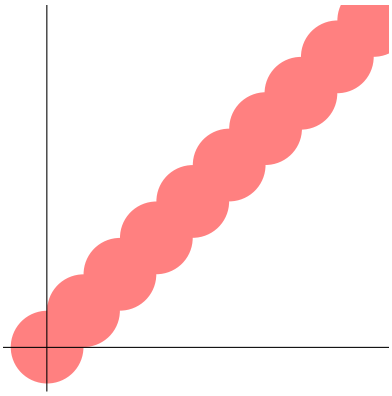
(b) Seien $I \subset \mathbb{N}$ eine Indexmenge und A_i beliebige Mengen. Zeigen Sie, dass dann gilt

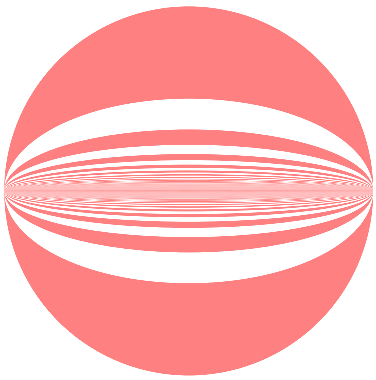
$$\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c \qquad \text{und} \qquad \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c.$$

Aufgabe 5: Prüfen Sie, ob die jeweiligen Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ offen bzw. abgeschlossen sind.

(a) $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x,y); (x-n)^2 + (y-n)^2 \leq 1\}$

(b) $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x,y); x^2 + (2n+1)^2 y^2 \leq 1 \leq x^2 + (2n+2)^2 y^2\}$





Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$