Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Dr. Michael Kühn

WS 2017/2018

Analysis 3

Übungsblatt 1

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 3 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss am Donnerstag, den 19.10.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1:

(a) Sei $A := \{1, \{2\}, \{3, 4\}\}$. Bestimmen Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$.

(b) Sei B eine beliebige Menge mit $|B| = n$. Zeigen Sie $|\mathcal{P}(B)| = 2^n$.

Aufgabe 2:

(a) Wir betrachten für $X = \{1, 2, 3, 4\}$ die folgenden Mengensysteme:

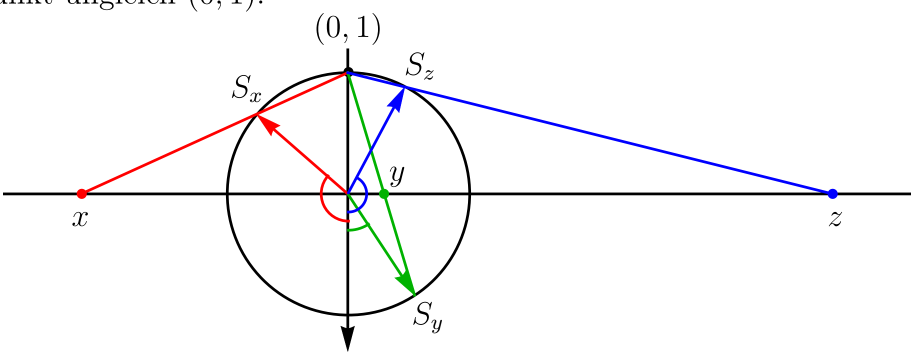
- $M_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$
- $M_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

Prüfen Sie ob die Mengensysteme Topologien sind.

(b) Sei $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eine endliche Menge mit $n \in \mathbb{N}^+$. Zeigen Sie, dass nur die Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ die Hausdorff-Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{R}; A^c \text{ ist abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist. Besitzt diese die Hausdorff-Eigenschaft?

Aufgabe 4 (5 Punkte)**:** Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir S_x wie folgt: Man betrachte die Gerade durch $(x, 0)$ und $(0, 1)$. Diese Gerade hat genau zwei Schnittpunkte mit dem Einheitskreis $\partial B_1(0)$. S_x sei der Schnittpunkt ungleich $(0, 1)$.



Weiter sei $d(x, y)$ als die kürzeste Bogenlänge über den Einheitskreis zwischen den beiden Schnittpunkten S_x und S_y definiert. Zeigen Sie, dass $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Metrik ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**:** Sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik. Weiter sei $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine einmal stetig differenzierbare Funktion mit

(i) $g(0) = 0$ und $g(x) > 0$ für $x > 0$,

(ii) g monoton wachsend,

(iii) g' monoton fallend.

Zeigen Sie, dass dann auch $d^*(x, y) := g(d(x, y))$ eine Metrik definiert.

Aufgabe 6 (0+0+3+3 Punkte)**:** Prüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen Metriken sind:

(a) $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $d_1(x, y) = \min\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}$

(b) $d_2 : C([0, 1]) \times C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ und $d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \; \mathrm{d}x$

(c) $d_3 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $d_3(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k - y_k|}{\sqrt{1 + |x_k - y_k|^2}}$

(d) Für $p \in \mathbb{R}^n$ sei $d_4 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und

$$d_4(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{falls } x \text{ und } y \text{ auf einer Geraden mit } p \text{ liegen,} \\ \|x - p\| + \|p - y\| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 7: Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Mengen in der Borel-σ-Algebra der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ sind.

(a) $(-1, 1)$ (b) $(0, 1]$ (c) $\{0, 1\}$ (d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Aufgabe 8 (5 Punkte)**:** Sei $f : A \to B$ eine Funktion und $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf B. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(X); X \in \mathcal{B}\}$$

eine σ-Algebra auf A ist.

Aufgabe 9: Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ zwei σ-Algebren über X, so dass $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ebenfalls eine σ-Algebra ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, oder $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$ gilt.