Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Dr. Michael Kühn

WS 2017/2018

Analysis 3

Übungsblatt 10

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 3 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 21.12.2017, um 12 Uhr.

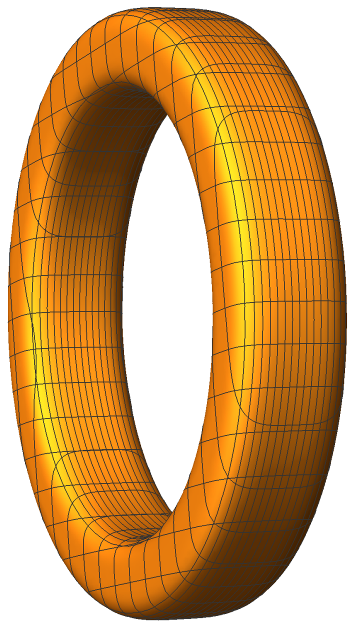
Aufgabe 1 (5 Punkte)**:** Wir betrachten

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + t\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] ; \varphi \in [0, 2\pi), t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\}.$$

Zeigen Sie, dass M eine zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 2: Einen Verlobungsring T kann man beschreiben durch

$$T = \left\{ (x, y, z) ; 4\left(\sqrt{y^2 + z^2} - \frac{3}{2}\right)^4 + x^4 = \frac{1}{81} \right\}.$$



(a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{wenn } t \geq 0, \\ -\sqrt{|t|} & \text{wenn } t < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\Phi : A \to T$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\varphi, \theta) := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} g(\sin\varphi) \\ \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} g(\cos\varphi)\right) \cos\theta \\ \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} g(\cos\varphi)\right) \sin\theta \end{pmatrix}$$

bei geschickt gewähltem A den Ring parametrisiert.

(b) Welches Integral beschreibt bei dieser Parametrisierung den 2-dimensionalen Flächeninhalt der Oberfläche des Rings?

(c) Welches Integral beschreibt das 3-dimensionale Volumen vom Inneren

$$\left\{ (x, y, z) ; 4\left(\sqrt{y^2 + z^2} - \frac{3}{2}\right)^4 + x^4 < \frac{1}{81} \right\}.$$

des Rings?

Aufgabe 3 (5 Punkte)**:** Bestimmen Sie das 3-dimensionale Volumen in $\mathbb{R}^4$ von

$$G = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\,;\, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 + 1 < 5\right\}\,,$$

wenn man

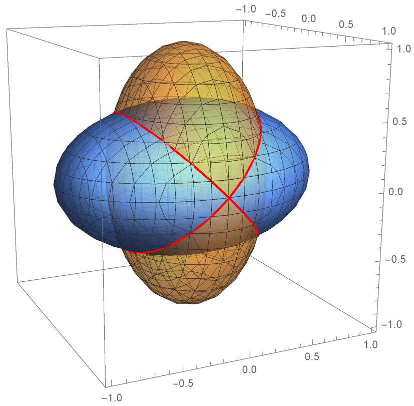
$$x = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2+1}\cos\varphi \\ \sqrt{r^2+1}\sin\varphi \\ r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

als Parametrisierung nimmt.

Aufgabe 4 (3+2 Punkte)**:** Die Schnittmenge von A und B mit

$$A := \left\{(x,y,z)\,;\, 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1\right\}$$
$$B := \left\{(x,y,z)\,;\, 2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1\right\}$$

kann wie im nebenstehenden Bild durch zwei glatte Kurven beschrieben werden.



(a) Finden Sie Parametrisierungen beider Kurven.

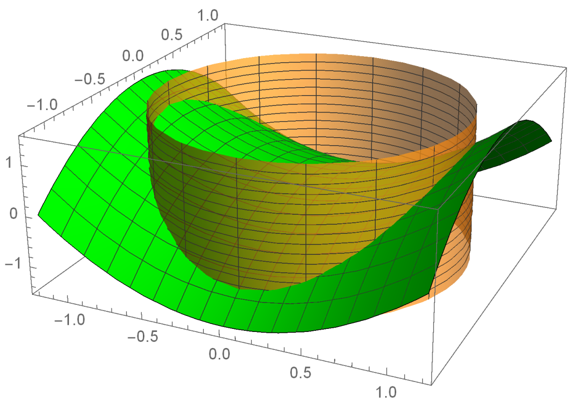
(b) Berechnen Sie die Länge dieser Kurven.

Aufgabe 5: Wir betrachten

$$G = \left\{(x,y,z)\,;\, z = x^2 - y^2\right\} \text{ und } Z = \left\{(x,y,z)\,;\, x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Integraldarstellung für den Flächeninhalt des Teils von G, der innerhalb von Z liegt.

(b) Bestimmen Sie eine Integraldarstellung für die Länge der Schnittmenge.



Aufgabe 6 (5 Punkte)**:** Zeigen Sie, dass $M \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Menge $U_x \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U_x \to \mathbb{R}^{n-m}$ gibt, so dass

$$\text{Rang}(\nabla f) = n - m \text{ und } M \cap U_x = \{y \in U_x\,;\, f(y) = 0\}.$$