Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Dr. Michael Kühn

WS 2017/2018

Analysis 3

Übungsblatt 11

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 3 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 11.01.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Wahr oder falsch? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Der Block $R_{a,b,c} = (0,a) \times (0,b) \times (0,c)$, mit $a,b,c > 0$, hat Volumen $V(R_{a,b,c}) = abc$. Für die Flächeninhalte der einzelnen Seiten gilt

$$S_1(R_{a,b,c}) = \frac{\partial}{\partial a} V(R_{a,b,c}), \quad S_2(R_{a,b,c}) = \frac{\partial}{\partial b} V(R_{a,b,c}), \quad S_3(R_{a,b,c}) = \frac{\partial}{\partial c} V(R_{a,b,c}).$$

(b) Die Kugel $B_R(0)$ mit Radius R in $\mathbb{R}^3$ hat Volumen $V(B_R(0)) = \frac{4}{3}\pi R^3$. Für den Flächeninhalt $S(B_R(0))$ einer Sphäre in $\mathbb{R}^3$ mit Radius R gilt

$$S(B_R(0)) = \frac{\partial}{\partial R} V(B_R(0)).$$

(c) Der Zylinder $Z_{R,\ell}$ mit Radius R und Länge ℓ hat Volumen $V(Z_{R,\ell}) = \pi R^2 \ell$. Für die Flächeninhalte der flachen, beziehungsweise runde Seite gilt $S(B_R(0))$ einer Sphäre in $\mathbb{R}^3$ mit Radius R gilt

$$S_f(Z_{R,\ell}) = \frac{\partial}{\partial \ell} V(Z_{R,\ell}), \quad S_r(Z_{R,\ell}) = \frac{\partial}{\partial R} V(Z_{R,\ell}).$$

(d) Das Ellipsoid $E_a = \{x^2 + 4y^2 + 9z^2 < a^2\}$, mit $a > 0$, hat Volumen $V(E_a) = 8\pi a^3$. Für den Flächeninhalt der Oberfläche dieses Ellipsoid gilt

$$S(E_a) = \frac{\partial}{\partial a} V(E_a).$$

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)**:** Zeigen Sie:

(a) Jede stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}^n$ mit $\dot\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$ ist eine Immersion.

(b) Ist $\alpha = (r,z) : (0,1) \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\dot\alpha(t) \neq 0$ und $r(t) > 0$ für alle $t \in (0,1)$, dann ist

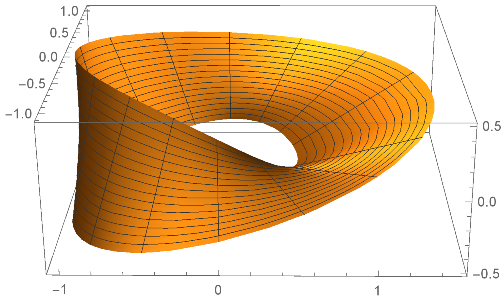
$$\gamma(s,t) := \begin{pmatrix} r(s)\cos(t) \\ r(s)\sin(t) \\ z(s) \end{pmatrix}$$

eine Immersion.

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)**:** Sei $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ und $p = \left(-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{\sqrt{2}}{2}c\right)$.

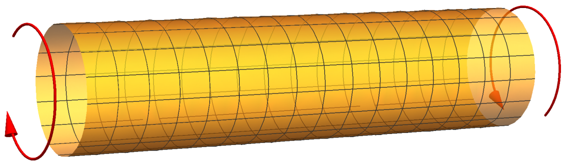
(a) Bestimmen Sie den Tangentialraum T_pM.

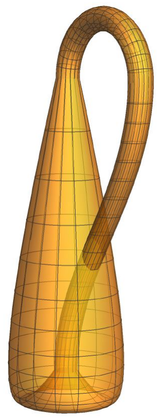
(b) Bestimmen Sie den Kotangentialraum T_p^*M.



Aufgabe 4 (6 Punkte)**:** Sei M das Möbius-Band wie in Aufgabe 1 von Blatt 10 definiert. Zeigen Sie, dass M nicht orientierbar ist.

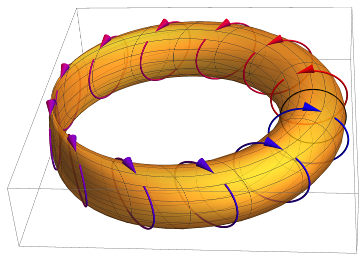
Aufgabe 5: Die Kleinsche Flasche entsteht durch Verkleben der Enden eines Zylinders, jedoch nicht so wie beim Torus, sondern in entgegengesetzter Richtung (siehe Bild). Wenn man dies in $\mathbb{R}^3$ machen möchte, entsteht dabei eine sich selbst durchdringende Menge.





Man kann den Zylinder jedoch in $\mathbb{R}^4$ verkleben zu einer Mannigfaltigkeit ohne Selbstdurchschneidung. Zum Beispiel durch die Parametrisierung

$$p(s,t) = \begin{pmatrix} 4\cos t + \cos s \cos(t/2) \\ 4\sin t + \cos s \sin(t/2) \\ \sin s \\ \sin t \end{pmatrix}$$



In der letzten Skizze sehen Sie die ersten 3 Komponenten von $p(s,t)$ dargestellt. Zeigen Sie, dass $M = \{p(s,t); s,t \in \mathbb{R}\}$ eine nicht orientierbare Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 6 (2+2+0 Punkte)**:** Ist die jeweilige Menge eine Mannigfaltigkeit? Wenn ja, ist sie orientierbar?

(a) $\left\{\begin{pmatrix} (2+\cos\varphi)\cos\theta \\ (2+\cos\varphi)\sin\theta \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \theta,\varphi \in \mathbb{R}\right\}$ (b) $\left\{\begin{pmatrix} (1+2\cos\varphi)\cos\theta \\ (1+2\cos\varphi)\sin\theta \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \theta,\varphi \in \mathbb{R}\right\}$

(c) $\left\{\begin{pmatrix} \cos t \cos s \\ \sin t \cos s \\ \cos t \sin s \\ -\sin t \sin s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; s,t \in \mathbb{R}\right\}$