Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Dr. Michael Kühn

WS 2017/2018

Analysis 3

Übungsblatt 12

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 3 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 18.01.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte)**:** Berechnen Sie für jedes $p \in E = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1\}$ den Tangentialraum T_pE.

Hinweis: Für $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *gilt* $T_pE = \left\{ (p, v); v = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$.
Die dazugehörige Tangentialfläche hat als Ebene (in Analysis 2 - Notation) folgende Gestalt:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Aufgabe 2: Wie lautet die allgemeine Form für $\omega \in \bigwedge^3(V^*)$ für $V = \mathbb{R}^n$?

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**:** Sei $V = \mathbb{R}^4$ und

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y) &= x_1 y_2 - x_2 y_1 , \\ \omega_2(x, y) &= x_3 y_4 - x_4 y_3 . \end{aligned}$$

(a) Begründen Sie, dass $\omega_1, \omega_2 \in \bigwedge^2(V^*)$.

(b) Berechnen Sie $\omega_1 \wedge \omega_2$.

Aufgabe 4: Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Zeigen Sie: Die 1-Formen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \neq 0$.

Aufgabe 5 (5 Punkte)**:** Seien V ein reeller Vektorraum und $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \bigwedge^1(V^*)$. Zeigen Sie für alle $v_1, \ldots, v_k \in V$:

$$(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det\left((\omega_i(v_j))_{i,j=1,\ldots,k}\right)$$

Aufgabe 6: Seien V, W reelle Vektorräume und $L : W \to V$ eine lineare Abbildung. Weiter sei $T^* : \bigwedge^k(V^*) \to \bigwedge^k(W^*)$ wie im Skript via

$$(L^*\omega)(w_1, \ldots, w_k) = \omega\left(Lw_1, \ldots, Lw_k\right)$$

definiert. Zeigen Sie:

(a) $T^*(\omega \wedge \eta) = (T^*\omega) \wedge (T^*\eta)$ und

(b) $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

(c) Sei nun $W = V$. Zeigen Sie, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für jede $\omega \in \bigwedge^n(V*)$ gilt:

$$T^*\omega = c\,\omega$$

Stellt man T bezüglicher einer Basis durch eine Matrix A da, so gilt $c = \det A$.

Aufgabe 7: Sei V ein reeller Vektorraum. Eine k-Form $\omega \in \bigwedge^k V^*$ heißt zerlegbar, falls $\omega = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$ für geeignete $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$. Zeigen Sie:

(a) Für $\dim V \leq 3$ ist jede 2-Form zerlegbar.

(b) Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in V^*$ linear unabhängig, so ist $\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_3 \wedge \alpha_4$ nicht zerlegbar.

Aufgabe 8 (2+4 Punkte)**:** Man betrachte im $\mathbb{R}^{2n}$ die Form

$$\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_{n+1} + \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_{n+2} + \ldots + \mathrm{d}x_n \wedge \mathrm{d}x_{2n}\,.$$

Zeigen Sie:

(a) $\omega \in \bigwedge^2(V^*)$

(b) Die n-te äußere Potenz hat die Darstellung

$$\underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n \text{ Faktoren}} = (-1)^{n(n-1)/2} n!\, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \wedge \mathrm{d}x_{n+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{2n}\,.$$