Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Dr. Michael Kühn **WS 2017/2018**

Analysis 3

Übungsblatt 13

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 3 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 25.01.2018, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Sei A eine symmetrische Matrix in $M^{n\times n}(\mathbb{R})$. Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(v) = \frac{v \cdot Av}{v \cdot v}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine beschränkte Funktion ist, d.h., dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$|f(v)| < c$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\nabla f(v)$.

(c) Begründen Sie, dass es $v_{\max} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v_{\max}\| = 1$ gibt, sodass

$$f(v_{\max}) = \sup_{v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f(v) \qquad \text{gilt.}$$

(d) Zeigen Sie, $\nabla f(v_{\max}) = 0$.

(e) Zeigen Sie, dass $v_{\max}$ ein Eigenvektor von A mit Eigenwert $f(v_{\max})$ ist.

Aufgabe 2: Sei B_r eine Kugel im $\mathbb{R}^n$ vom Radius r. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß:

(a) Es gilt $\mathrm{Vol}(\partial B_r) = \frac{n}{r}\mathrm{Vol}(B_r)$.
Hinweis: Ist $a \in \mathbb{R}^n$ das Zentrum der Kugel, so betrachten sie das Vektorfeld $F(x) = x-a$.

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial U \in C^1$ und äußerem Normalenvektorfeld $\mathbf{n}$. Für einen beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}^n \setminus \partial U$ sei

$$F(x) := \frac{x-a}{|x-a|^n}.$$

Dann gilt

$$\int_{\partial U} F \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \notin U, \\ \mathrm{Vol}(\partial B_1) & \text{falls } a \in U. \end{cases}$$

Hinweis: Untersuchen Sie zunächst die Divergenz von F in $\mathbb{R}^n\setminus\{a\}$. Anschließend schneiden Sie eine beliebig kleine Kugel um a aus U heraus und überlegen sich, wie das äußere Normalenvektorfeld der so entstehenden Menge $U \setminus B_\varepsilon(a)$ aussieht.

Aufgabe 3 (0+2+2+0 Punkte)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\partial U \in C^1$. Weiter sei $\mathbf{n}$ der auswärts gerichtete Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$ und $\mathrm{d}\sigma$ das Oberflächendifferential. Zeigen Sie:

(a) Für $u \in C^1(\overline{U})$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $\displaystyle\int_U \frac{\partial}{\partial x_i} u \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\partial U} u \, \mathbf{n}_i \, \mathrm{d}\sigma$

(b) Für $u, v \in C^1(\overline{U})$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $\displaystyle\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, \mathrm{d}\lambda = -\int_U u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, \mathrm{d}\lambda + \int_{\partial U} uv \, \mathbf{n}_i \, \mathrm{d}\sigma$

(c) Für $u \in C^2(\overline{U})$ gilt: $\displaystyle\int_U \Delta u \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}\sigma$

(d) Für $u, v \in C^2(\overline{U})$ gilt: $\displaystyle\int_U \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}\lambda = -\int_U u \Delta v \, \mathrm{d}\lambda + \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial n} \, \mathrm{d}\sigma$

Aufgabe 4 (2+2+0+0+2 Punkte)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^2(U; \mathbb{R})$, $F \in C^2(U; \mathbb{R}^3)$ und $v \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Vektor. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{rot}(F \times v) = \partial_v F - (\operatorname{div} F) v$,

(b) $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$,

(c) $\operatorname{rot} \nabla f = 0$,

(d) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} F = \nabla(\operatorname{div} F) - \Delta F$,

(e) $\operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot} F + (\nabla f) \times F$.

Aufgabe 5 (5 Punkte)**:** Sei $Q = \{(x, y, z) \; ; \; 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ der Einheitsquader und

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} x(1-x)y \\ y \\ z(1-z)e^{x+y} \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie den Satz von Gauß um

$$\int_Q \nabla \cdot v \, \mathrm{d}V$$

zu berechnen.

Aufgabe 6 (5 Punkte)**:** Sei $M = \{(x, y, z) \; ; \; 0 < z = 1 - x^2 - y^2\}$ und

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y - x \\ z^2 + x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $\mathbf{n}$ das hinauf gerichtete Normalenvektorfeld und $\mathrm{d}\sigma$ das Oberflächendifferential. Berechnen Sie

$$\int_M (\nabla \times v) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\sigma.$$

Hinweis: Satz von Stokes.