Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Dr. Michael Kühn

WS 2017/2018

Analysis 3

Übungsblatt 2

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 3 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss am Donnerstag, den 26.10.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)**:** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{, falls } x \in \mathbb{Q} \text{ und } x = \frac{p}{q}, \text{ wobei } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N}^+ \text{ teilerfremd sind,} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

(a) Es seien folgende Mengen gegeben:

$$\begin{array}{lll} A_1 = (0,1) & A_2 = \{1\} & A_3 = \left(1, \frac{5}{4}\right) \\ B_1 = (0,1) & B_2 = (-1,1) & B_3 = \left(1, \frac{5}{4}\right) \end{array}$$

Geben Sie $f(A_i)$ und $f^{-1}(B_i)$ für $i \in \{1,2,3\}$ an.

(b) Zeigen Sie: f ist $\mathcal{A}_\mathcal{T}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar, wobei $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ hier die Borel-σ-Algebra der offenen Mengen der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2: Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Seien weiter I, J Indexmengen und $X_i \subset X$ für $i \in I$ und $Y_j \subset Y$ für alle $j \in J$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} f(X_i) = f\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)$

(b) $\displaystyle\bigcap_{i\in I} f(X_i) = f\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right)$

(c) $\displaystyle\bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right)$

(d) $\displaystyle\bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j) = f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right)$

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)**:** $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ enthalte alle (nach Standardtopologie) offenen Mengen von $\mathbb{R}$ und $\mathcal{P}([0,\infty))$. Weiter sei $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ die dazu gehörende σ-Algebra. Zeigen Sie:

(a) $f(x) = 2x$ ist $\mathcal{A}_\mathcal{S}$-$\mathcal{A}_\mathcal{S}$-messbar.

(b) $f(x) = 1$ ist $\mathcal{A}_\mathcal{S}$-$\mathcal{A}_\mathcal{S}$-messbar.

(c) $f(x) = 2x + 1$ ist nicht $\mathcal{A}_\mathcal{S}$-$\mathcal{A}_\mathcal{S}$-messbar.

Hinweis: Es gibt Mengen in $(0,1)$*, die nicht Borel-messbar sind.*

Aufgabe 4 (2+2+0+0+0+2+2 Punkte)**:** Wir betrachten $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_\mathcal{T})$ mit der Standard-σ-Borel-Algebra $\mathcal{A}_\mathcal{T}$. Zeigen Sie:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^+$. Wenn $A \in \mathcal{A}_\mathcal{T}$, dann gilt auch

- $x + A := \{x + a; a \in A\} \in \mathcal{A}_\mathcal{T}$.
- $-A := \{-a; a \in A\} \in \mathcal{A}_\mathcal{T}$.
- $cA := \{ca; a \in A\} \in \mathcal{A}_\mathcal{T}$.

(b) Sei $M \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit $\det(M) \neq 0$. Wenn $A \in \mathcal{A}_\mathcal{T} \otimes \mathcal{A}_\mathcal{T}$, dann gilt auch $MA := \{Ma; a \in A\} \in \mathcal{A}_\mathcal{T} \otimes \mathcal{A}_\mathcal{T}$.

(c) Es gilt $\{(y, -y)\,; y \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{A}_\mathcal{T} \otimes \mathcal{A}_\mathcal{T}$. *Hinweis:* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} B_{\frac{2}{n}}\left(\frac{k}{n}, -\frac{k}{n}\right)$.

(d) Sei $A \in \mathcal{A}_\mathcal{T}$. Dann gilt $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2; y_1 + y_2 \in A\} \in \mathcal{A}_\mathcal{T} \otimes \mathcal{A}_\mathcal{T}$.

(e) Die Abbildung $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $s(a, b) = a + b$, ist $(\mathcal{A}_\mathcal{T} \otimes \mathcal{A}_\mathcal{T}) - \mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar.

(f) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}_\mathcal{T} - \mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbare Funktionen. Dann ist $x \mapsto (f(x), g(x)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine $\mathcal{A}_\mathcal{T} - (\mathcal{A}_\mathcal{T} \otimes \mathcal{A}_\mathcal{T})$-messbare Funktion.

(g) Zeigen Sie $x \mapsto s(f(x), g(x)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{A}_\mathcal{T}-\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar. Bemerke, dass $s(f(x), g(x)) = f(x) + g(x)$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für die Borel-σ-Algebren von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ folgendes gilt: $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_\mathbb{R}} \otimes \mathcal{A}_{\mathcal{T}_\mathbb{R}} = \mathcal{A}_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}}$. Weil $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}}$ die kleinste σ-Algebra auf $\mathbb{R}^2$ ist, die alle Mengen $A_1 \times A_2$ mit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_\mathbb{R}}$ enthält, kann man alle Borel-Mengen in $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}}$ durch abzählbare Vereinigungen, Schnitte und Komplemente von $A_i \times A_j$ mit $A_i, A_j \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_\mathbb{R}}$ erhalten.

Aufgabe 5: Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir nennen eine Menge $A \in \mathcal{A}$ ein μ-Atom, wenn $\mu(A) > 0$ ist und für jedes $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$ entweder $\mu(B) = 0$ oder $\mu(A \setminus B) = 0$ gilt. Zeigen Sie

(a) Sind A, B μ-Atome, so gilt $\mu(A \cap B) = 0$ oder $\mu((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = 0$.

(b) Ist A ein μ-Atom und $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$, so gilt $\mu(B) = 0$ oder $\mu(B) = \mu(A)$.

(c) Ist $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$ und gilt für jedes $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$ entweder $\mu(B) = 0$ oder $\mu(B) = \mu(A)$, so ist A ein μ-Atom.

Sonderaufgabe: Sei B die Menge aller Zahlen $x \in \mathbb{R}$, deren Darstellung als Dezimalzahl folgende Gestalt hat:

$$x = m_0\,,\, m_1 1 m_2 11 m_3 111 m_4 \ldots$$

Dabei seien m_k Tupel endlicher Länge mit Ziffern aus der Menge $\{0, 2, 3, 4, \ldots, 9\}$, die jeweils gefolgt werden durch k Einsen.
Beweisen oder widerlegen Sie: B ist keine Borel-Menge.

Zu lösen bis zum 26.10.2017 um 12 Uhr mit einer Belohnung für die erste korrekte per Email eingereichte Antwort eines Analysis 3 - Studierenden.