Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Dr. Michael Kühn

WS 2017/2018

Analysis 3

Übungsblatt 3

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 3 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss am Donnerstag, den 02.11.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Für $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \delta_a)$ und es gelte $\{a\} \in \mathcal{A}$. Dabei ist δ_a wie folgt definiert:

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in A \\ 0 & \text{falls } a \notin A \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass der Maßraum genau dann vollständig ist, wenn $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gilt.

Aufgabe 2: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und μ^* ein äußeres Maß auf X. Seien weiter $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$. Wahr oder nicht wahr?

(a) Wenn $\mu(B \setminus A) = 6$ gilt, so folgt $\mu(A) < \mu(B)$.

(b) Wenn $\mu^*(B \setminus A) = 6$ und $\mu^*(B) < \infty$ gilt, so folgt $\mu^*(A) < \mu^*(B)$.

Aufgabe 3 (1+1 Punkte)**:** Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \in [0, \infty]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ in $[0, \infty]$ konvergiert und dass

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)} \tag{1}$$

für jede Permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt.

(b) Geben Sie eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ an, die in $\mathbb{R}$ konvergiert und für die (1) nicht gilt.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass $h_s^*(\{(x, 0, 0) ; x \in \mathbb{R}\})$ in $\mathbb{R}^3$ für $s > 1$ gleich 0 ist.

Aufgabe 5: Wir betrachten den Sierpinski-Würfel S:

$$S = [0,1]^3 \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \bigcup_{l=0}^{3^n-1} \bigcup_{m=0}^{3^n-1} \left[\tfrac{3k+1}{3^{n+1}}, \tfrac{3k+2}{3^{n+1}}\right] \times \left[\tfrac{3l+1}{3^{n+1}}, \tfrac{3l+2}{3^{n+1}}\right] \times \left[\tfrac{3m+1}{3^{n+1}}, \tfrac{3m+2}{3^{n+1}}\right] \right)$$

Zeigen Sie, dass $h_s^*(S) = 0$ für $s > \frac{\log(26)}{\log(3)}$.

Aufgabe 6 (2+2+2 Punkte)**:** Sei h_s^* das äußere Hausdorff-Maß mit $s \in [0,n]$ auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) Wenn $0 \le s < t \le n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist derart, dass $h_s^*(A) < \infty$ ist, dann gilt $h_t^*(A) = 0$.

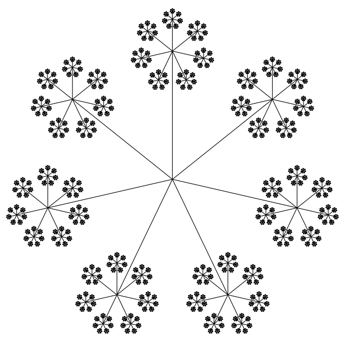
(b) Wenn $0 \le s < t \le n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist derart, dass $h_t^*(A) > 0$ ist, dann gilt $h_s^*(A) = \infty$.

(c) Für jedes beschränkte $A \subset \mathbb{R}^n$ gibt es genau ein $s_A \in [0,n]$ derart, dass

$$h_s^*(A) = 0 \text{ für } s > s_A \text{ und } h_s^*(A) = \infty \text{ für } s < s_A.$$

Man nennt s_A die *Hausdorff-Dimension* von A.

Aufgabe 7 (3 Punkte)**:** Die nebenstehende Figur wurde wie folgt erzeugt: Zunächst beginnt man mit 7 Strecken der Länge L. Im ersten Iterationsschritt fügt man an jedem der 7 Endpunkte jeweils 7 Strecken der Länge $\frac{L}{4}$ hinzu. Dies wiederholt man für jeden der so neu entstandenen Endpunkte und viertelt dabei in jedem Iterationsschritt die Länge. Das heißt im n-ten Iterationsschritt fügt man 7^{n+1} Strecken der Länge $\frac{L}{4^n}$ hinzu.
Berechnen Sie die Hausdorff-Dimension (siehe Aufgabe 6) dieser Figur.



Aufgabe 8 (3+3+3 Punkte)**:** Zu Beginn sei $C_0 := [0,1]$ das Einheitsintervall. Dieses teilen wir in drei gleiche Teile und entfernen, das Mittlere. So erhalten wir die Menge $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Wir wiederholen unser Vorgehen für jedes Teilintervall und erhalten die Menge $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ und so weiter. Induktiv entsteht so die Menge

$$C := [0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right).$$

Zeigen Sie:

(a) Jedes $x \in C$ besitzt eine *triadische Dartstellung*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \, 3^{-k}$$

mit $x_i \in \{0,2\}$ für $i = 1, \ldots, \infty$.

(b) C ist überabzählbar, hat aber äußeres Lebesgues-Maß $\lambda^*(C) = 0$.

(c) C hat Hausdorff-Dimension $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. (siehe Aufgabe 6)