Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Dr. Michael Kühn

WS 2017/2018

Analysis 3

Übungsblatt 4

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 3 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss am Donnerstag, den 09.11.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (2+0 Punkte)**:** Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ zwei messbare Räume, $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ eine messbare Funktion und $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) Durch
$$\nu(B) := \mu(f^{-1}(B)) \quad \text{für } B \in \mathcal{B},$$
wird ein Maß auf $\mathcal{B}$ definiert.

(b) Führt man für das in (a) definierte Maß die Notation $f(\mu) := \nu$ ein, so gilt für jede weitere messbare Funktion $g : (Y, \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C})$
$$(g \circ f)(\mu) = g(f(\mu)),$$
also Transitivität.

Aufgabe 2: Sei $d(.,.)$ die Distanzfunktion zweier Mengen in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Man beweise oder wiederlege:

(a) $d(x, A) \geq d(y, A) - \|x - y\|$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{P}$

(b) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

(c) $d(A \cup B, C) \leq \min(d(A, C), d(B, C))$ für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

(d) $d(A \cap B, C) \leq \max(d(A, C), d(B, C))$ für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 3 (0+3+3+0 Punkte)**:** Für jede Menge $A \in \mathcal{L}$ gibt es kompakte Mengen K_n und offene Mengen O_n mit $K_n \subset A \subset O_n$ und mit
$$\lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) = \lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(O_n).$$

Konstruiere solche Mengen für

(a) $A = \mathbb{R}$,

(b) $A = \mathbb{Q}$,

(c) $A = C$ die Cantormenge,

(d) $A = C^*$ die fette Cantormenge.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**:** Im Allgemeinen gibt es für $A \in \mathcal{L}$ weder offene Mengen $O_n \subset A$ mit $\lim_{n\to\infty} \lambda(O_n) = \lambda(A)$, noch kompakte Mengen $K_n \supset A$ mit $\lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) = \lambda(A)$.

Geben Sie Beispiele zweier Mengen $A \in \mathcal{L}$, bei der das Lebesgue-Maß sich so nicht approximieren lässt.

Aufgabe 5: Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Für $K \in \mathcal{L}$ mit $\lambda(K) > 0$ enthält die Menge $2K - K$ eine offene Kugeln.

(b) Es gibt eine Menge $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}$ mit $\lambda_{\mathbb{R}^2}(A) = 1$, die keine offene Kugel (Kreisscheibe) enthält.

Aufgabe 6 (1+1+3+1+1 Punkte)**:** Sei $C \subset [0,1]$ die in Blatt 3 Aufgabe 8 konstruierte Cantormenge. Dort haben wir gezeigt, dass jedes $x \in C$ die Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} 2x_k \cdot 3^{-k}$$

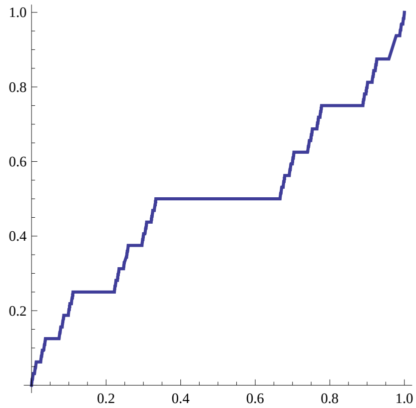
mit $x_k \in \{0,1\}$ besitzt. Mit dieser Darstellung definieren wir die Funktion

$$F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot 2^{-k}$$

auf C und setzen sie durch

$$F(y) := \sup\{F(x)\,;\, x \in C, x \leq y\}$$

zu einer Funktion $F : [0,1] \to [0,1]$ fort. Zeigen Sie:



(a) F ist stetig.

(b) F ist monoton wachsend.

(c) F ist für kein $x \in C$ differenzierbar.

(d) F ist für alle $x \in [0,1] \setminus C$ differenzierbar mit $F'(x) = 0$.

(e) F ist surjektiv.

Hinweis zu (c): Zeigen Sie zunächst, dass für $\alpha, \gamma \geq 0$ und $\beta, \delta > 0$ gilt:

$$\max\left\{\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right\} \geq \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}.$$