Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Dr. Michael Kühn

WS 2017/2018

Analysis 3

Übungsblatt 5

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 3 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss am Donnerstag, den 16.11.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (5+0 Punkte)**:**

(a) Finden Sie für jedes $\varepsilon > 0$ einfache Lesbesgue-messbare Funktionen f_1 und f_2 derart, dass $f_1(x) \leq \frac{1}{\sqrt{|x|}} \leq f_2(x)$ für $0 < |x| \leq 1$ und sodass gilt:

$$\int_{[-1,1]} f_1 \,\mathrm{d}\lambda + \varepsilon \geq \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \,\mathrm{d}x \geq \int_{[-1,1]} f_2 \,\mathrm{d}\lambda - \varepsilon\,.$$

(b) Finden Sie für jedes $\varepsilon > 0$ einfache Lesbesgue-messbare Funktionen f_1 und f_2 derart, dass $f_1(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq f_2(x)$ für $x \in [1,\infty]$ und sodass gilt:

$$\int_{[1,\infty]} f_1 \,\mathrm{d}\lambda + \varepsilon \geq \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x \geq \int_{[1,\infty]} f_2 \,\mathrm{d}\lambda - \varepsilon\,.$$

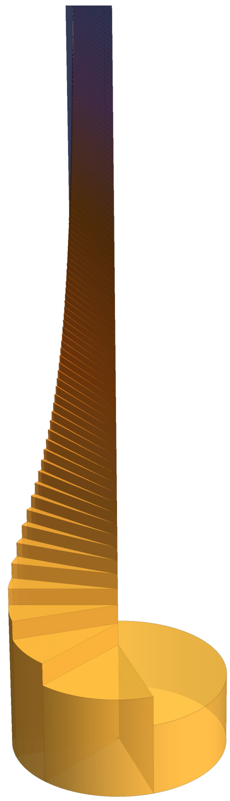
Aufgabe 2 (0+0+0+3 Punkte)**:** Sei $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort (Beweis oder Gegenbeispiel).

(a) f Riemann-integrierbar $\Longrightarrow$ f Lebesgue-integrierbar.

(b) f Lebesgue-integrierbar $\Longrightarrow$ f Riemann-integrierbar.

(c) f uneigentlich Riemann-integrierbar $\Longrightarrow$ f Lebesgue-integrierbar.

(d) f Lebesgue-integrierbar $\Longrightarrow$ f uneigentlich Riemann-integrierbar.



Aufgabe 3: Die Funktion $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei für $r \in (0,1)$ und $\varphi \in \left(\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}\right]$ mit $n \in \mathbb{N}^+$ definiert durch

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \sqrt{n}\,.$$

Zeigen Sie, dass f Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)**:** Die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ sei für $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ mit $n \in \mathbb{N}^+$ stückweise definiert durch

$$f(x) = (-1)^n \frac{1}{x}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Riemann-Integral $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.

(b) Zeigen Sie, dass f nicht Lesbesgue-integrierbar über $(0,1]$ ist.

Aufgabe 5 (6 Punkte)**:** Sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. f ist Lebesgue-integrierbar.
2. f^+ und f^- sind Lebesgue-integrierbar.
3. Es gibt Lebesgue-integrierbare Funktionen $u \geq 0$, $v \geq 0$ mit $f = u - v$.
4. Es gibt eine Lebesgue-integrierbare Funktion g mit $|f| \leq g$.
5. $|f|$ ist Lebesgue-integrierbar.

Hinweis: Es genügt nicht auf die entsprechenden Aussagen im Skript zu verweisen.

Aufgabe 6: Seien $f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar über X. Zeigen Sie:

(a) Die Funktionen $\max\{f_1, f_2\}$ und $\min\{f_1, f_2\}$ sind auch Lebesgue-integrierbar.

(b) Falls $f_1 \leq f_2$, so gilt

$$\int_X f_1 \,\mathrm{d}\lambda \leq \int_X f_2 \,\mathrm{d}\lambda\,.$$

(c) Es gilt

$$\left|\int_X f_1 \,\mathrm{d}\lambda\right| \leq \int_X |f_1| \,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Aufgabe 7: Sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Weiter sei $Y \subset X$ eine ebenfalls messbare Teilmenge. Zeigen Sie, dass f dann auch integrierbar auf Y ist und es gilt

$$\int_Y f d\lambda = \int_X f \cdot \mathbb{1}_Y d\lambda.$$

Aufgabe 8: Sei $f : X_1 \cup X_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar über X_1 und über X_2. Zeigen Sie: Wenn $\lambda(X_1 \cap X_2) = 0$, dann ist f Lebesgue-integrierbar über $X_1 \cup X_2$ und es gilt:

$$\int\limits_{X_1 \cup X_2} f \,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_{X_1} f \,\mathrm{d}\lambda + \int\limits_{X_2} f \,\mathrm{d}\lambda\,.$$