Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Dr. Michael Kühn

WS 2017/2018

Analysis 3

Übungsblatt 6

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 3 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 23.11.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte)**:** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und zusammenhängend und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in K$ gibt, sodass

$$\int_K f \,\mathrm{d}\lambda = f(\xi)\lambda(K)\,.$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Bildmenge $f(K)$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 2 (3+0+0+3 Punkte)**:** Wir betrachten punktweise Konvergenz, punktweise Konvergenz fast überall, gleichmäßige Konvergenz, Konvergenz im Maß und $\mathcal{L}^1$-Konvergenz.

Untersuchen Sie für jede Funktionenfolge $\{f_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, welcher der Konvergenzbegriffe zutrifft und geben Sie eine Grenzfunktion an.

(a) $f_{1,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{1,n}(x) = \max\{n\,(1 - |x-n|)\,, 0\}$

(b) $f_{2,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{2,n}(x) = \max\{1 - n\,|x-n|\,, 0\}$

(c) $f_{3,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{3,n}(x) = \max\left\{\frac{1}{n}\,(1 - |x-n|)\,, 0\right\}$

(d) $f_{4,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{4,n}(x) = \max\{\sqrt{n} - n\,|x-n|\,, 0\}$

Aufgabe 3: $f : X \to \mathbb{R}$ sei eine $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbare Funktion.

(a) Sei $\lambda(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\left(\{x \in X\ ;\ f(x) > n\}\right) = 0$.

(b) Sei $A_n = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) < n\}$ und $\int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda < \infty$. Zeigen Sie, dass $f_n(x) = f(x)\mathbf{1}_{A_n}(x)$ im Maß gegen f konvergiert.

(c) Gilt die Aussage aus Teil (b) auch, wenn $\int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda = \infty$?

Aufgabe 4: Seien $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbare Funktionen. Wahr oder falsch?

(a) Wenn $f \in \mathcal{L}^1$ stetig ist und $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = 0$ gilt, so muss $f = 0$ gelten.

(b) Für $f_n, f \in \mathcal{L}^1$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_{\mathcal{L}^1}$.

(c) Wenn $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen ist, die gleichmäßig gegen f konvergiert, so ist auch der Limes f stetig.

(d) Es gibt eine Funktionenfolge $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{L}^1$-Funktionen, welche gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1$ konvergiert, aber nicht in $\mathcal{L}^1$ gegen f konvergiert.

(e) $\{f_k\}$ konvergiert genau dann im Maß gegen die Nullfunktion, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(\left\{x\,;\sup_{k\geq n}|f_k(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**:** Sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbare Funktion und $p, \alpha \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie

$$\lambda\left(\{x\,;|f(x)| \geq \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha^p}\int_X |f|^p \ \mathrm{d}\lambda\,.$$

Aufgabe 6: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_k, f : X \to \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{N}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ messbare Funktionen. Weiter sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ gilt:

$$f_k \to f \text{ nach dem Maß } \mu \text{ auf } A \subset X \quad\Longrightarrow\quad \phi\circ f_k \to \phi\circ f \text{ nach dem Maß } \mu \text{ auf } A \subset X.$$

Zeigen Sie außerdem durch ein Gegenbeispiel, dass $\mu(A) < \infty$ eine notwendige Bedingung ist.

Aufgabe 7 (3+1+2 Punkte)**:** Wir betrachten die Funktionenfolge $\{f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nx & \text{für } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{für } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

(a) $\{f_n\}$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{L^1([-1,1])}$ ist, aber

(b) bezüglich dieser Norm keine stetige Funktion als Grenzwert hat.

(c) Begründen Sie, dass $\big(C([-1,1]), \|.\|_{L^1([-1,1])}\big)$ nicht vollständig ist.