Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Dr. Michael Kühn

WS 2017/2018

Analysis 3

Übungsblatt 7

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 3 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 30.11.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f' beschränkt.

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitung f' Lebesgue-integrierbar auf $(0,1)$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie $f_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1-x}{n}\right) - f\left(x - \frac{x}{n}\right)\right)$ *für* $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{[a,b]} f' \, d\lambda = f(b) - f(a) \text{ für alle } 0 < a < b < 1.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Satz über majorisierte Konvergenz für den Differenzenquotienten und die Tatsache, dass f eine Stammfunktion hat, weil f stetig ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**:** Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar mit $0 < \lambda(X) < \infty$ und $f : X \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie die Ungleichung

$$F\left(\frac{1}{\lambda(X)} \int_X f \, \mathrm{d}\lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda(X)} \int_X F(f) \, \mathrm{d}\lambda.$$

Hinweis: Eine mögliche Definition der Konvexität von F ist, dass es zu jedem $y \in \mathbb{R}$ ein $p \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass

$$f(x) \geq f(y) + p(x-y)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Weiter dürfen Sie verwenden, dass $F \circ f$ Lesbegue-integrierbar ist.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)**:** Bestimmen Sie für die jeweilige Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ eine Funktion f so, dass $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ λ-fast-überall gilt und berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}\lambda \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\lambda\,.$$

(a) $f_n(x) = e^{-nx^2}$

(b) $f_n(x) = n^\alpha \, \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{n}\right]}(x)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

(c) $f_n(x) = n \log\left(1 + \dfrac{g(x)}{n}\right)$ für $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ mit $g \geq 0$

Aufgabe 4 (0+2+2+0 Punkte)**:** Wir definieren die Funktionenfolge $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\delta_k \in L^1(\mathbb{R})$ durch

$$\delta_k(x) := \frac{1}{\pi}\frac{k}{k^2x^2+1}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}^+$ gilt $\delta_k \geq 0$.

(b) Für alle $k \in \mathbb{N}^+$ gilt $\int_{\mathbb{R}} \delta_k \; \mathrm{d}x = 1$.

(c) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \delta_k \; \mathrm{d}x = 0$.

(d) Für alle $f \in C_c(\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_k(x-y)f(y) \; \mathrm{d}y = f(x).$$

Aufgabe 5: Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar, so gilt λ-fast-überall in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = \lim_{n\to\infty} f(x-n) = 0\,.$$

Aufgabe 6: (a) Es seien $f_k : X \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbare Funktionen auf einer Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda(X) < \infty$ und die Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiere auf X gleichmäßig gegen die Funktion f. Man zeige, dass auch f über X integrierbar ist, und

$$\int_X f \; \mathrm{d}\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k \; \mathrm{d}\lambda\,.$$

(b) Geben Sie ein Gegenbeispiel dafür an, dass in Teil (a) nicht auf $\lambda(X) < \infty$ verzichtet werden kann.

Aufgabe 7: Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ eine Reihe Lebesgue-integrierbarer Funktion (auf $\mathbb{R}^n$) mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k| \; \mathrm{d}\lambda < \infty\,.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe fast überall gegen eine integrierbare Funktion konvergiert. Zeigen Sie weiter die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right) \; \mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \; \mathrm{d}\lambda\,.$$

Aufgabe 8 (4+2 Punkte)**:**

(a) Seien $1 \leq p < q < \infty$ und $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar mit $0 < \lambda(X) < \infty$. Zeigen Sie

$$\mathcal{L}^q(X) \subset \mathcal{L}^p(X).$$

(b) Gilt die Aussage von (a) auch noch, wenn $\lambda(X) = \infty$ ist? Beweisen Sie die Aussage in diesem Fall oder widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel.