Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Dr. Michael Kühn

WS 2017/2018

Analysis 3

Übungsblatt 8

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 3 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 07.12.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1 (3+2 Punkte)**:** Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ und $p \in [1, \infty]$.

(a) Zeigen Sie: $f = g$ λ-fast überall in $X \quad \Longleftrightarrow \quad \|f - g\|_{\mathcal{L}^p(X)} = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ eine Norm auf $C(X) \cap \mathcal{L}^p(X)$ ist.

Aufgabe 2:

(a) Sei $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ mit $\lambda(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$.

(b) Gilt die Aussage auch für $\lambda(X) = \infty$? Finden Sie einen Beweis oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**:** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > a$ und $p \in [1, \infty)$. Sei $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $u(a) = 0 = u(b)$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $C > 0$ unabhängig von u gibt, sodass

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p([a,b])} \leq C \|u'\|_{\mathcal{L}^p([a,b])}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Aussage für $p = 1$ und nutzen Sie anschließend für $p > 1$ die Hölder-Ungleichung.

Aufgabe 4: Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

(a) Sei $u \in C([a, b])$. Weiter gelte für alle $v \in C^1([a, b])$ mit $v(a) = 0 = v(b)$

$$\int_{[a,b]} uv' \, \mathrm{d}\lambda = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass u konstant ist: $u(x) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b u(y) \, \mathrm{d}y$.

Hinweis: Finden Sie eine passende Funktion v, deren Ableitung v' der Funktion $u - c$ für eine passende Konstante c entspricht.

(b) Sei $V := \left\{u\,;\, u \in C^1([a,b]) \text{ mit } u(a) = 0 = u(b)\right\}$. Prüfen Sie, ob die folgende Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ein inneres Produkt auf V ist:

$$\langle u, v\rangle = \int_{[a,b]} (uv' + u'v + uv)\ \mathrm{d}\lambda\,.$$

Aufgabe 5: Sei H ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und zugehörige Norm $\|\cdot\|$. Sei $\{x_1, x_2, \dots\} \subset H$ ein Orthonormalsystem, d.h. für alle $i, j \in \mathbb{N}^+$ gilt

$$\langle x_i, x_j\rangle = 0 \text{ wenn } i \neq j \text{ und } \langle x_i, x_i\rangle = 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass für $N \in \mathbb{N}^+$ gilt:

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} x_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2\,.$$

(b) Sei $y \in H$. Zeigen Sie, dass für $y_N = \sum_{n=1}^{N} \langle x_n, y\rangle\, x_n$ gilt

$$\|y - y_N\|^2 = \|y\|^2 - \|y_N\|^2\,.$$

(c) Sei $y \in H$. Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y\rangle^2 \leq \|y\|^2\,.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)**:** Seien $c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)$ und $s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)$ für $n \in \mathbb{N}^+$. Damit definieren wir $S := \{c_n\ ;\ n \in \mathbb{N}^+\} \cup \{s_n\ ;\ n \in \mathbb{N}^+\}$. Zeigen Sie, dass für $f, g \in S$

$$\int_0^{2\pi} fg\ \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{falls } f \neq g \\ 1 & \text{falls } f = g \end{cases}$$

gilt. Das heißt, dass S ein Orthonormalsystem in $L^2([0, 2\pi])$ bildet.

Aufgabe 7 (2+2+2 Punkte)**:** Sei $\partial : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ der Operator, der jeder Funktion $f \in C^1([0,1])$ ihre Ableitung $f' \in C([0,1])$ zuordnet, der also $\partial f = f'$ erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass $\partial : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ stetig ist. Dabei seien $C([0,1])$ mit der Norm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

und $C^1([0,1])$ mit der Norm $\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ versehen.

(b) Bestimmen Sie

$$\sup_{\substack{f\in C^1([0,1]) \\ f\neq 0}} \frac{\|f'\|_\infty}{\|f\|_{C^1}}\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_k(x) := \frac{1}{k}\sin(k\pi x)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\partial : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ nicht stetig ist, wenn man $C^1([0,1])$ ebenfalls mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versieht.