Prof. Dr. Guido Sweers
Jan Gerdung, M.Sc.
Dr. Michael Kühn

WS 2017/2018

Analysis 3

Übungsblatt 9

Die Lösungen müssen in den Übungsbriefkasten Analysis 3 (Raum 301 im MI) geworfen werden. Abgabeschluss ist am Donnerstag, den 14.12.2017, um 12 Uhr.

Aufgabe 1: Zeigen Sie:

(a) $2\int_{x^2<1}\sqrt{1-x^2}dx$ ist das 2d-Volumen der Einheitskreisscheibe.

(b) $2\int_{x^2+y^2<1}\sqrt{1-x^2-y^2}d\,(x,y)$ ist das 3d-Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$.

(c) $2\int_{x^2+y^2+z^2<1}\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}d\,(x,y,z)$ ist das 4d-Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 2: Berechnen Sie:

(a) $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$.

(b) $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2}dx$.

(c) $\int_{\mathbb{R}^3} e^{-|x|^2}dx$.

Hinweis: Fangen Sie mit (b) an.

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)**:**

(a) Sei $a\in\mathbb{R}^+$. Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Aufgabe 2.

(b) Sei $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und invertierbar. Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|Ax|^2}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 4: Zeigen Sie für $s>1$:

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Hierbei ist $\zeta(s):=\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ die Riemannsche Zetafunktion.

Aufgabe 5: Wir definieren $P_\varepsilon := \int_0^{1-\varepsilon} \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+xy}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$.

(a) Schreiben Sie den Integranden als geometrische Reihe um zu zeigen, dass

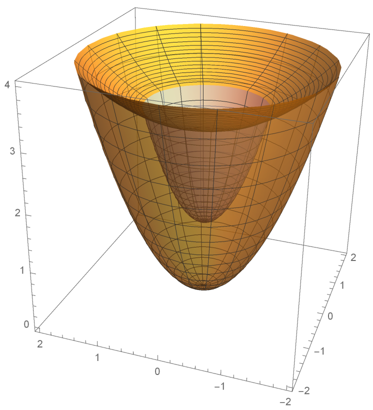
$$P_\varepsilon = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon)^{2n+1}}{(2n+1)^2}\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass $P := \lim_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon$ existiert.

(c) Verwenden Sie die Substitution $z = z(x) = x + \frac{1}{2} y (x^2 - 1)$ um zu zeigen, dass

$$P = \int_0^1 \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+2zy+y^2}\, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y\,.$$

(d) Zeigen Sie: $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$.



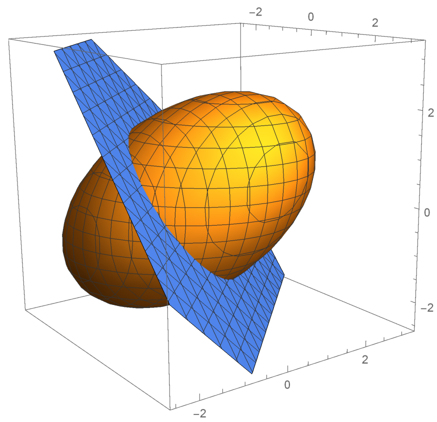
Aufgabe 6 (5 Punkte)**:** Berechnen Sie das Volumen von

$$G = \left\{ (x,y,z)\,;\, \frac{1}{2} z - \frac{5}{8} < x^2 + y^2 < z < 3 + \frac{1}{4} \left(x^2 + y^2 \right) \right\}.$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)**:** Berechnen Sie das Volumen von

$$E = \left\{ (x,y,z)\,;\, 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - xy - yz - xz < 9 \text{ und } x + y + z > 0 \right\}.$$

Hinweis: Substitution $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r+s+t \\ r-s+t \\ r-2t \end{pmatrix}$.



Aufgabe 8 (2+2+0 Punkte)**:** Das Trägheitsmoment eines Körpers $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit Massendichte ρ um die z-Achse ist

$$M_z = \int_\Omega \left(x^2 + y^2 \right) \rho \, d(x,y,z)\,.$$

Nehmen wir $\rho = 1$. Berechnen Sie dieses Trägheitsmoment von

(a) der Kugel $B_1(0) = \{(x,y,z)\,;\, x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$;

(b) der verschobene Kugel $B_1((1,0,0)) = \left\{(x,y,z)\,;\, (x-1)^2 + y^2 + z^2 < 1\right\}$;

(c) des Diabolos $D = \{(x,y,z)\,;\, x^2 + y^2 < z^2 + 1 < 10\}$.