Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2010/2011

Analysis III
Aufgaben der Klausur vom 8.2.2011

1. Berechnen Sie das 4-dimensionale Volumen von

$$\left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in [0,1] \right\}.$$

2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition eines Maßes, dass

$$\mu (A \cap B) + \mu (A \cup B) = \mu (A) + \mu (B).$$

3. Sei λ das Lebesgue–Maß auf $\mathbb{R}^n$ und sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue–messbare Menge mit $\lambda (A) > 0$.

   Sind die folgenden Aussagen jeweils wahr oder nicht wahr? Begründen Sie Ihre Antworten.

   (a) Es gibt eine Kugel $B_\varepsilon (x) \subset A$ mit $\varepsilon > 0$.

   (b) Es gibt eine Kugel $B_\varepsilon (x) \subset A - A = \{u - v; u, v \in A\}$ mit $\varepsilon > 0$.

   NB: $B_\varepsilon (x) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|x - y\| < \varepsilon\}$.

4. Die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f_n (x) = nxe^{-nx^2}$.

   (a) Konvergiert f_n punktweise?

   (b) Konvergiert f_n gleichmäßig?

   (c) Konvergiert f_n in $\mathcal{L}^1 ([0,1])$?

5. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f (x) = \frac{1}{\|x\|^2 + \|x\|^4} \text{ für } x \neq 0.$$

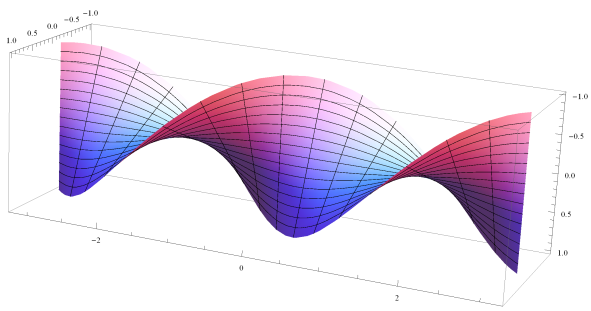
   Für welche $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $f \in \mathcal{L}^2 (\mathbb{R}^n)$?

6. Wie lautet die Ungleichung von Hölder für Funktionen?

7. Wir betrachten die Mannigfaltigkeit $M = \psi ([-\pi, \pi] \times [-1, 1])$ für

$$\psi (x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \sin (x) \\ y \cos (x) \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie den Flächeninhalt von M.



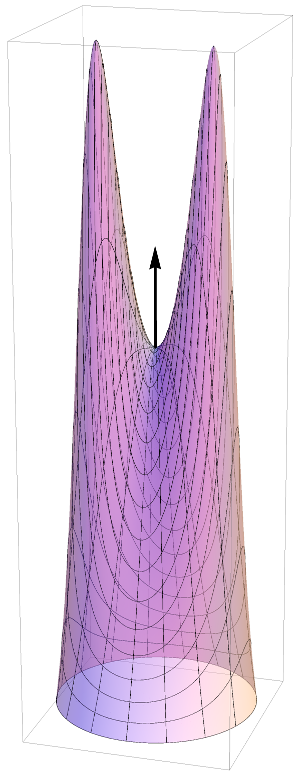
Hinweis: $\int \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{1}{2} t \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln \left(t + \sqrt{1 + t^2} \right)$.

8. Sei H eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei ω eine zweimal stetig differenzierbare äußere k-Form auf H, also $\omega \in \Omega_2^k(H)$. Zeigen Sie, dass $dd\omega = 0$.

9. Wir betrachten

$$D = \left\{ (x, y, z) \,; 0 \leq z = \left(1 - x^2 - y^2\right) \left(\frac{1}{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 + \frac{1}{10}} + \frac{1}{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 + \frac{1}{10}} \right) \right\}$$

und das Vektorfeld



$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + z \\ z - x \\ \sin(x + y + z) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_D (\nabla \times v) \cdot n \; d\sigma.$$

Dabei sei n so gewählt, dass $n_3 > 0$.

10. Gegeben sei das Vektorfeld

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + (1 - x^2 - y^2 - z^2)^5 \\ y + (1 - x^2 - y^2 - z^2)^{4711} \\ z + \sin(1 - x^2 - y^2 - z^2) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für die Kugel $B = \{(x, y, z) \,; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

$$\int_B \nabla \cdot v \; d\lambda.$$