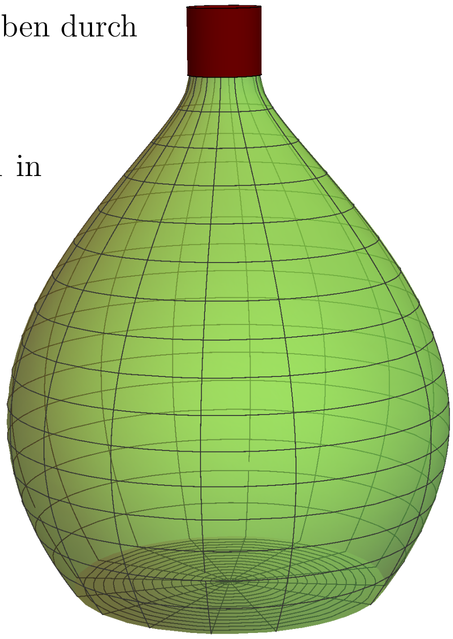
NAME:	AUFGABE 1	



Das Innere der etwa einen halben Meter hohen Flasche wird beschrieben durch

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ x^2+y^2\le\frac{21}{10}+2\sin(z)\ ,\ 0\le z\le\frac{3}{2}\pi\right\}.$$

Die Maße x, y und z sind in Dezimeter. Wieviel Liter Wein passen in diese Flasche?

NAME: | AUFGABE 2

Wenn $\mathcal{A}_X$ eine σ-Algebra ist für X und $\mathcal{A}_Y$ eine σ-Algebra ist für Y, ist dann

$$\mathcal{A} = \{A_1 \times A_2; A_1 \in \mathcal{A}_X \text{ und } A_2 \in \mathcal{A}_Y\}$$

eine σ-Algebra für $X \times Y$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Name:	Aufgabe 3	

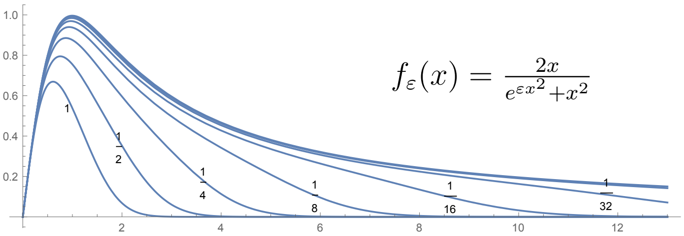
Für welche $p \in [1, \infty]$ liegt die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|^2}$ in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2)$?

NAME: AUFGABE 4

Bestimmen Sie $M \in [0, \infty]$, definiert durch

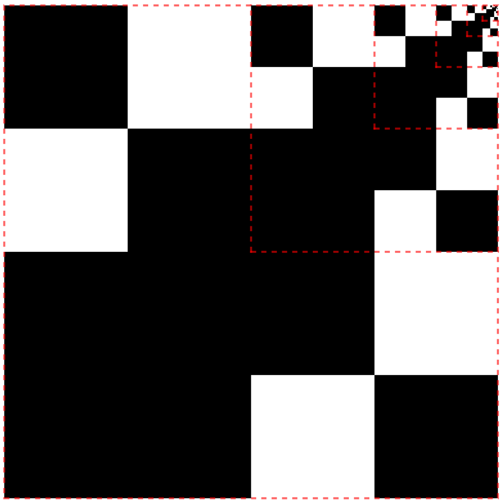
$$M = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^\infty \frac{2x}{e^{\varepsilon x^2} + x^2} dx$$

und begründen Sie Ihre Antwort.



Name:	**Aufgabe 5**

Das Gebiet $K \subset [0,1] \times [0,1]$ ist wie folgt:



(a) $\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \subset K$,

(b) $K \cap \left(\left[0, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]\right) \cup \left(\left[0, \frac{1}{4}\right] \times \left[\frac{3}{4}, 1\right]\right)$,

(c) $(x,y) \in K \Leftrightarrow (y,x) \in K$,

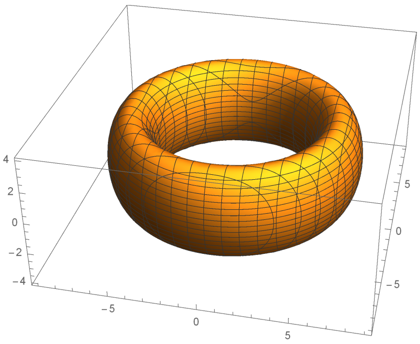
(d) $(x,y) \in \left(K \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right]^2\right) \Leftrightarrow (2x-1, 2y-1) \in K$.

- Begründen Sie, dass K Lebesgue-messbar ist.
- Berechnen Sie das Lebesguemaß von K.

NAME:

AUFGABE 6

Wir betrachten die Oberfläche des Ringes



$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 6 \right)^2 + \tfrac{1}{4} z^2 = 2 \right\}$$

und nehmen $p = (3, 4, 2) \in M$.

(a) Berechnen Sie den auswärtigen Einheitsnormalenvektor in p.

(b) Geben Sie eine Formel für $T_p M$ an.

Name: Aufgabe 7

Der Ring aus der letzten Aufgabe läßt sich parametrisieren durch $\psi : A \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\psi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} (6 + R\cos(\varphi))\cos(\vartheta) \\ (6 + R\cos(\varphi))\sin(\vartheta) \\ 2R\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie R.

(b) Berechnen Sie A und $f : A \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$\int_A f(\varphi, \vartheta)\, d\varphi d\vartheta$$

das Integral für den Flächeninhalt von M darstellt.

NAME: | AUFGABE 8

Sei $x \in \mathbb{R}^3$.

(a) Geben Sie jeweils n und m an, so dass für $f \in C^2\left(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^n\right)$ die Funktion $g \in C\left(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^m\right)$ wohldefiniert ist:

(i) $g(x) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f(x)$,

(ii) $g(x) = \operatorname{grad} \operatorname{div} f(x)$,

(iii) $g(x) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f(x)$,

(iv) $g(x) = \operatorname{div} \operatorname{rot} f(x)$.

(b) In welchem Fall, oder in welchen Fällen, gilt $g = 0$ für alle f? Beweisen Sie Ihre Antwort.

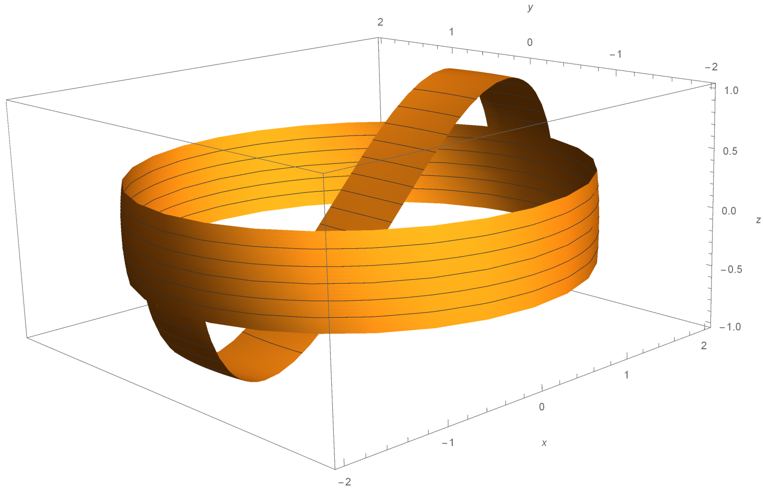
Name: Aufgabe 9

Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\psi(s,t) = \begin{pmatrix} 2\cos(s)\cos(t) \\ 2\cos\left(\frac{1}{5}\right)\sin(t) \\ \sin(2s) \end{pmatrix}$$

und sei $M = \psi(B_1) \cup \psi(B_2)$ mit

$$B_1 = \left[-\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}\right] \times [0, 2\pi],$$
$$B_2 = [0, \pi] \times \left[-\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}\right].$$



(a) Stellt $\psi(B_1)$ den Ring oder das S-förmige Band dar?

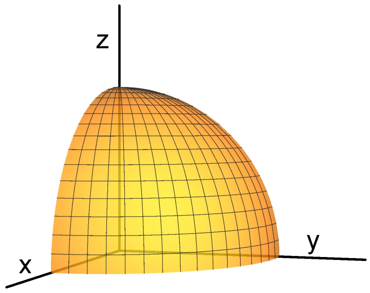
(b) Ist M orientierbar?

(c) Sei $g \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Gilt $\displaystyle\int_M (\nabla \times g) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_{\partial M} g\, \boldsymbol{\tau} ds$ für geschickte $\boldsymbol{\tau}$ und $\mathbf{n}$?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Name:	Aufgabe 10	

Den Teil der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ im ersten Oktanten nennen wir



$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ mit } x, y, z \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \cos z \\ xy \sin z \\ xy \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für den Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}$ mit positiven Komponenten das Integral

$$\int_D (\nabla \times v) \cdot \mathbf{n} \; d\sigma.$$