NAME: AUFGABE 1

Definiere $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ durch $f_n(x) = \sqrt[n]{1-x^2}$.

(i) Konvergiert f_n gleichmäßig für $n \to \infty$?

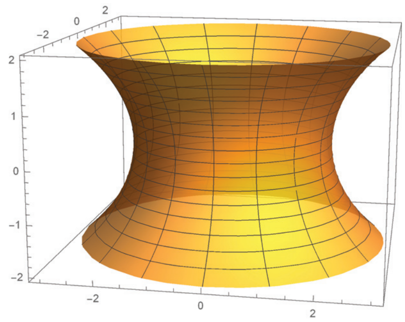
(ii) Begründen Sie, dass f_n in $\mathcal{L}^1([-1,1])$ konvergiert für $n \to \infty$.

Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \sqrt[n]{1-x^2}\, dx$.

NAME: AUFGABE 2

Sei

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} (e^z + e^{-z}) \cos\varphi \\ (e^z + e^{-z}) \sin\varphi \\ 2z \end{pmatrix} ; |z| \le 1 \text{ und } |\varphi| \le \pi \right\}.$$



Berechnen Sie den Flächeninhalt von T.

Name: Aufgabe 3

Der Baum B im Bild wird wie folgt konstruiert:

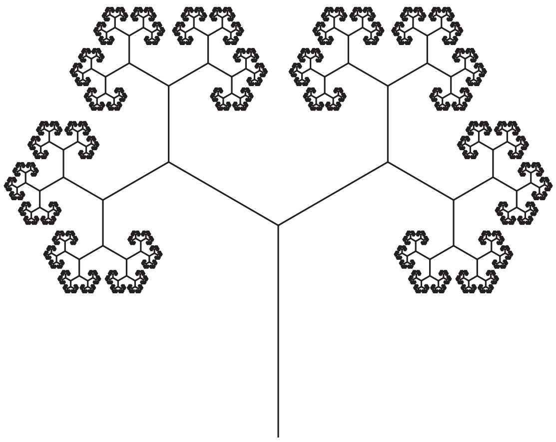
- Die erste Generation besteht aus dem Ast $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.
- Zu jedem Ast der n-ten Generation gehören jeweils zwei Äste der $(n+1)$-ten Generation.
- Jeder Ast der $(n+1)$-ten Generation hat 0.6 der Länge eines Astes der n-ten Generation.

(i) Zeigen Sie, dass für das 1-dimensionale Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^2$ gilt:

$$\lambda_{(1)}(B) = \infty\,.$$

(ii) Sei h_s^* das s-dimensionale äußere Hausdorff-maß. Berechnen Sie die Hausdorff-Dimension s_B von B unter der Annahme, dass

$$0 < h_{s_B}^*(B) < \infty\,.$$

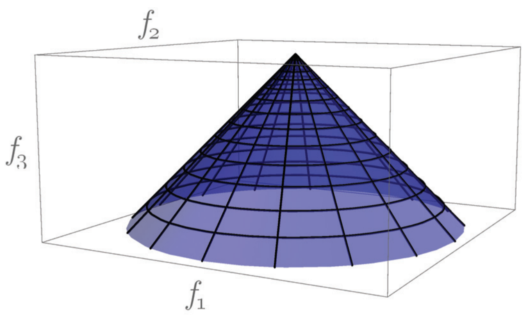


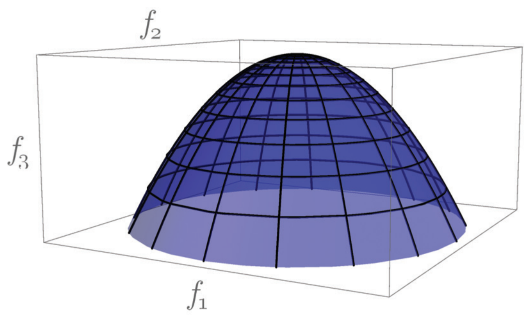
Name: Aufgabe 4

Wir betrachten $f : \{(x,y)\,;\, x^2+y^2<1\} \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2-y^2 \\ 1-x^2-y^2 \end{pmatrix}.$$

(i) Welches Bild gehört zu f?





(ii) Ist f eine Immersion?

Name: | Aufgabe 5

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Für passende $f : X \to \mathbb{R}$ definiert man

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} := \text{ess-sup}_X |f| = \inf_{\text{Nullmengen } N \subset X} \left(\sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| \right).$$

(i) Sei $\mathbf{1}_\mathbb{Q}$ die Indikatorfunktion für $\mathbb{Q}$. Berechnen Sie $\|\mathbf{1}_\mathbb{Q}\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})}$.

(ii) Wieso ist $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$ keine Norm auf $\mathcal{L}^\infty(X)$?

(iii) Wir definieren $\|f\|_* := \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Wieso ist $\|\cdot\|_*$ keine Seminorm auf $\mathcal{L}^\infty(X)$?

Name: | Aufgabe 6

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ x & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Gibt es eine offene Menge $A \subset (-10, 10)$ mit $\lambda(A) < 1$ und derart, dass $f_{|(-10,10)\setminus A}$ stetig ist? Auch hier ist λ das Lebesgue-Maß. Begründen Sie Ihre Antwort.

Name: Aufgabe 7

Sei $\omega = \dfrac{x}{(x^2+y^2)^2}dx + \dfrac{y}{(x^2+y^2)^2}dy$ eine Differentialform auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(i) Berechnen Sie $d\omega$.

(ii) Ist ω exakt?

Name: Aufgabe 8

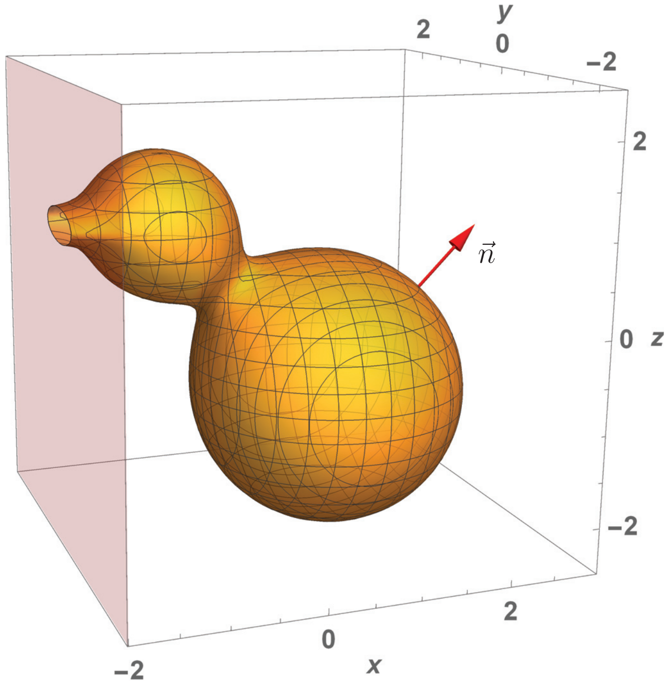
Gegeben sind:

- Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x,y,z) =$

$$\frac{1}{(x+2)^2+y^2+10(z-1)^2} + \frac{15}{(x-1)^2+y^2+(z+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^2+y^2+(z-1)^2}.$$

- Die Menge $M = \{(x,y,z)\,;\, x > -2 \text{ und } f(x,y,z) = 7\}$, die eine Mannigfaltigkeit mit einer Randkurve für $x = -2$ ist. Siehe Bild.

- Ein Vektorfeld $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$.



(i) Beschreiben Sie, welches Kurvenintegral zu

$$\int_M (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}\, d\sigma \qquad (1)$$

identisch ist. Hier ist $\vec{n}$ der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor.

(ii) Berechnen Sie (1) für

$$\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z\,(x+2) \\ 4-x^2 \end{pmatrix}.$$