NAME:

AUFGABE 1

Sei X eine Menge und seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}(X)$ zwei σ-Algebren über X.

a. Ist $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra über X?

b. Ist $\mathcal{A} := \{A_1 \cup A_2; A_1 \in \mathcal{A}_1 \text{ und } A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ eine σ-Algebra über X?

Begründen Sie Ihre Antworten.

NAME: AUFGABE 2

Sei $A = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ die Indikatorfunktion von $\mathbb{Q}$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) := \max\left\{\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x_1), \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x_2)\right\}.$$

a. Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_A f \, d\lambda = 0$.

b. Ist f lokal Lebesgue-integrierbar?

Name: Aufgabe 3

Die Funktionen $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sind definiert durch $f_n(x) := n^3 x \exp(-n^2 x)$. Für diese Funktionen gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0, \infty)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2(0,\infty)} = \frac{1}{2}$. Beantworten Sie:

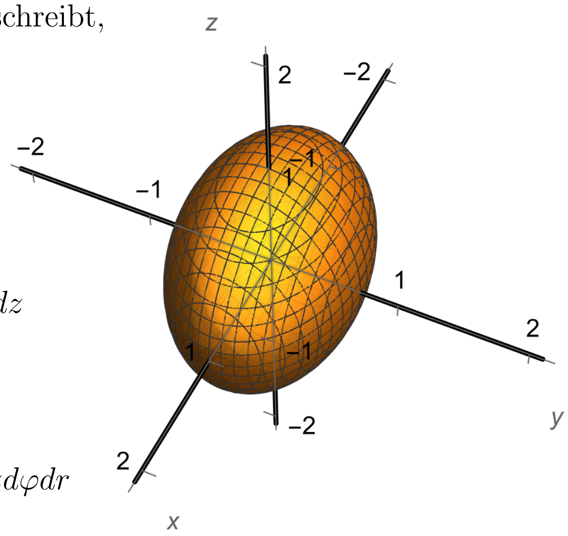
a. Was bedeutet $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2(0,\infty)} = \frac{1}{2}$?

b. Konvergiert f_n gleichmäßig auf $\mathbb{R}^+$ für $n \to \infty$?

c. Konvergiert f_n in $L^1(\mathbb{R}^+)$-Norm für $n \to \infty$?

NAME:	AUFGABE 4	

Wir betrachten das Ellipsoid $\mathcal{O} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + 2y^2 + z^2 \le 1\}$ mit Volumen $\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$. Jemand möchte das Volumen von $\mathcal{O}$ mit Zylinderkoordinaten (r,φ,z) berechnen.



a. Wenn $\tilde{\mathcal{O}}$ das gleiche Ellipsoid in Zylinderkoordinaten beschreibt, wie erklärt man den Faktor r im Integral

$$\mathrm{Vol}\,(\mathcal{O}) = \iiint_{(r,\varphi,z)\in\tilde{\mathcal{O}}} r\, d(r,\varphi,z)?$$

b. Ist diese explizite Formel passend?

$$\mathrm{Vol}\,(\mathcal{O}) = \int_{z=-1}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{\frac{1-z^2}{1+(\sin\varphi)^2}}} r\, dr d\varphi dz$$

c. Passt die nächste Formel auch?

$$\mathrm{Vol}\,(\mathcal{O}) = \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=-\sqrt{1-r^2(1+(\sin\varphi)^2)}}^{\sqrt{1-r^2(1+(\sin\varphi)^2)}} r\, dz d\varphi dr$$

Name: Aufgabe 5

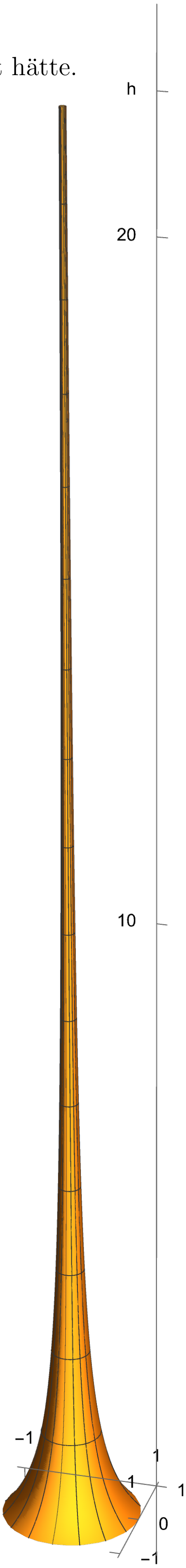
Wir betrachten $T_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x^2 + y^2)\, z^2 \leq 1 \leq z \leq h\}$ für $h \in (1, \infty)$.

a. Geben Sie ein Integral an für das Volumen V_h von T_h, so wie Cavalieri es gemacht hätte.

b. Berechnen Sie V_h.

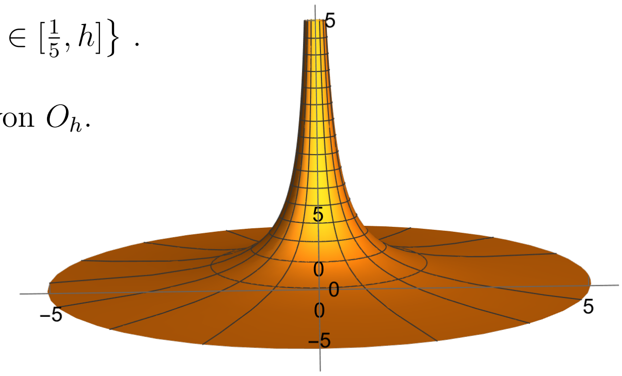
c. Existiert $\lim_{h\to\infty} V_h$?

Hinweis: Rechts gibt es ein Bild von T_h.



Name:	Aufgabe 6	

Wir betrachten $O_h = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; (x^2+y^2)\, z^2 = 1 \text{ für } z \in [\frac{1}{5}, h] \right\}$.



a. Geben Sie ein Integral an für den Flächeninhalt F_h von O_h.

   Versuchen Sie nicht, das Integral zu berechnen.

b. Welches trifft zu? $\lim_{h\to\infty} F_h < \infty$ oder $\lim_{h\to\infty} F_h = \infty$.

Hinweis: Rechts gibt es ein Bild von O_h.

Name: | Aufgabe 7

Sei $V = \mathbb{R}^4$.

a. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$d\left(x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3\,dx_1 \wedge dx_2\right).$$

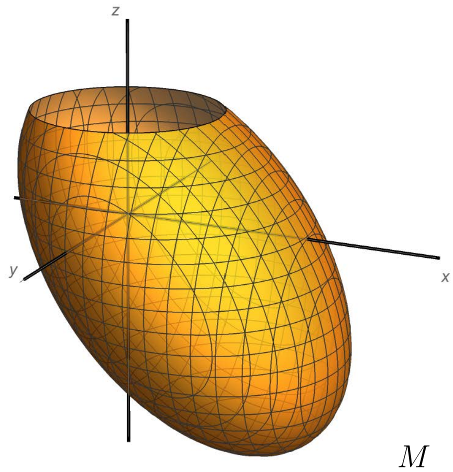
b. Gibt es $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ mit

$$d\omega = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_2\,dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 + x_3\,dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + x_4\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3?$$

Name:	Aufgabe 8	

Rechts steht eine Skizze von

$$M := \left\{ (x,y,z)^T ; x^2 + y^2 + x(z-1) + z^2 = 2 \text{ und } z \leq 1 \right\}.$$



M

Sei $\boldsymbol{n}(x,y,z)$ der nach außen zeigende Normalenvektor auf M an der Stelle $(x,y,z)^T \in M$ und sei

$$\boldsymbol{h}(x,y,z) = \left(x - y, x + y, \sin(x^2 + y^2 + z^2) \right)^T.$$

Wir möchten, dass Sie folgendes Integral berechnen:

$$\iint_M \operatorname{rot} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma.$$

PS. Andere Notationen: $\operatorname{rot} \boldsymbol{h} = \operatorname{curl} \boldsymbol{h} = \nabla \times \boldsymbol{h}$.