NAME: AUFGABE 1

1. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x = 0, \\ \|x\|^{-2} e^{-\|x\|} \text{ sonst.} \end{cases}$$

Für welche $n \in \mathbb{N}^+$ und $p \in [1, \infty)$ gilt $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$?

Name:	Aufgabe 2	

2. (a) Geben Sie die Definition eines Maßes an.

   (b) Wir betrachten $\mathbb{Z}^2$ und definieren für $A \subset \mathbb{Z}^2$

$$\mu(A) = \begin{cases} \sup\limits_{x,y \in A} \|x - y\| & \text{falls } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{falls } A = \emptyset. \end{cases}$$

   Dabei steht $\|\cdot\|$ für die euklidische Norm. Ist μ ein Maß?

Name:	Aufgabe 3	

3. Sei $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ für $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Unter gewissen Bedingungen an die Folge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gilt

   $$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k \, d\lambda.$$

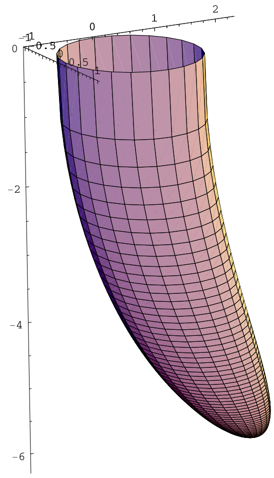
   Geben Sie eine solche Bedingung an.

   (b) Geben Sie ein Beispiel einer Funktionenfolge $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ an derart, dass $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, d\lambda$ und $\int_{\mathbb{R}} \lim\limits_{k\to\infty} f_k \, d\lambda$ in $\mathbb{R}$ existieren und nicht identisch sind.

Name: | **Aufgabe 4** |

4. Gegeben seien der Klingelbeutel

$$K = \left\{ (x,y,z); \left\{ \begin{array}{l} x = \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ y = \sin(\varphi)\sin(\theta) + 2\cos(\theta) \\ z = -6\sqrt{\cos(\theta)} \end{array} \right. \quad \text{mit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta \in \left[0, \tfrac{1}{2}\pi\right] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array} \right. \right\}$$



und das Vektorfeld $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} y + z^2 \\ z - x \\ e^{x+y+z} \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_K (\nabla \times v) \cdot \mathbf{n} d\sigma$.

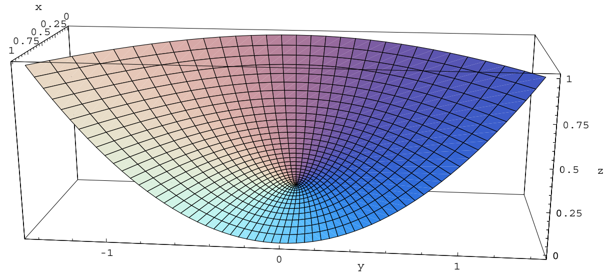
NAME:

AUFGABE 5

5. Wir betrachten

$$P = \left\{(x, y, z)\, ; 2xz = y^2 \text{ mit } x, z \in [0, 1]\right\}.$$

Berechnen Sie den Oberflächeninhalt von P.



Name:	Aufgabe 6	

6. Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zwei der folgenden Behauptungen sind richtig. Nennen Sie diese und begründen Sie Ihre Entscheidung (Beweis nicht erforderlich).

   Für alle $u, v \in C\,[0,1]$ gilt:

   (a) $\left(\int_0^1 |u(x)+v(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \le \left(\int_0^1 |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |v(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$;

   (b) $\left(\int_0^1 |u(x)+v(x)|^{1/p} \, dx\right)^{p} \le \left(\int_0^1 |u(x)|^{1/p} \, dx\right)^{p} + \left(\int_0^1 |v(x)|^{1/p} \, dx\right)^{p}$;

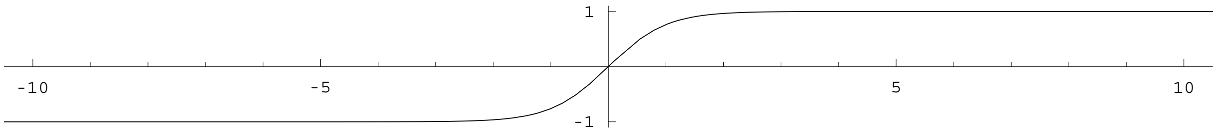
   (c) $\left(\int_0^1 |u(x)v(x)| \, dx\right)^{pq} \le \left(\int_0^1 |u(x)|^p \, dx\right)^{q} \left(\int_0^1 |v(x)|^q \, dx\right)^{p}$;

   (d) $\int_0^1 |u(x)|^p \, |v(x)|^q \, dx \le \left(\int_0^1 |u(x)| \, dx\right)^{p} \left(\int_0^1 |v(x)| \, dx\right)^{q}$.

Name:

Aufgabe 7

7. Eine Skizze des Graphen von tanh ist wie folgt:



Für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $f_k(x) = \tanh(x - k)$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $f_k \to -1$ punktweise für $k \to \infty$.

(b) $f_k \to -1$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ für $k \to \infty$.

(c) $f_k \to -1$ λ-f.ü. für $k \to \infty$. *Hierbei steht λ für das Lebesgue-Maß.*

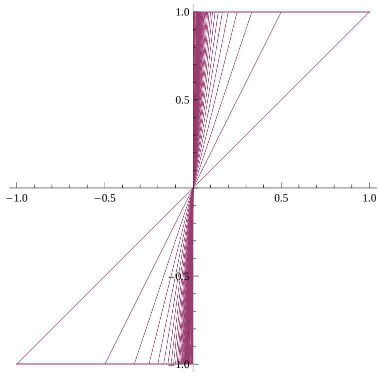
(d) $f_k \to -1$ im Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ für $k \to \infty$.

(e) $f_k \to -1$ in $L^1(\mathbb{R})$ für $k \to \infty$.

8. (a) Für $n \in \mathbb{N}^+$ definieren wir $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } |x| < \frac{1}{n}, \\ \operatorname{sgn}(x) & \text{für } |x| \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $f_n \to \operatorname{sgn}(\cdot)$ für $n \to \infty$ bezüglich der L^2-Norm.



(b) Die Menge $C[-1,1]$ der stetigen Funktionen auf $[-1,1]$ versehen mit der L^2-Norm ist ein normierter Raum. Ist dieser vollständig?

Name:	Aufgabe 9	

9. Es sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}$ gegeben. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.

   (a) f ist stetig.

   (b) f ist Riemann-integrierbar.

   (c) f ist Lebesgue-integrierbar.

   (d) f ist $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar.
   Dabei steht $\mathcal{L}$ für die Lebesgue-σ-Algebra und $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ für die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält.

Name: Aufgabe 10

10. Seien $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis auf $\mathbb{R}^3$ und $\{dx_i\}_{i\in\{1,2,3\}}$ die zugehörigen Standard-1-Formen.

   (a) Wir definieren $v(x) = x_1 e_2 + x_2 e_3$. Berechnen Sie

   $$\omega = v \lrcorner (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \, .$$

   (b) Ist ω eine geschlossene Form?

   (c) Ist ω eine exakte Form?