Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2010/2011

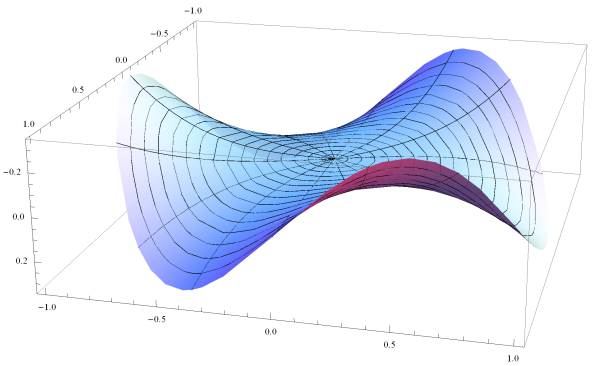
Analysis III
Aufgaben der Nachklausur vom 16.3.2011

1. Berechnen Sie für den Affensattel

$$A = \left\{ \left(x, y, \frac{1}{3}x^3 - xy^2 \right); x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

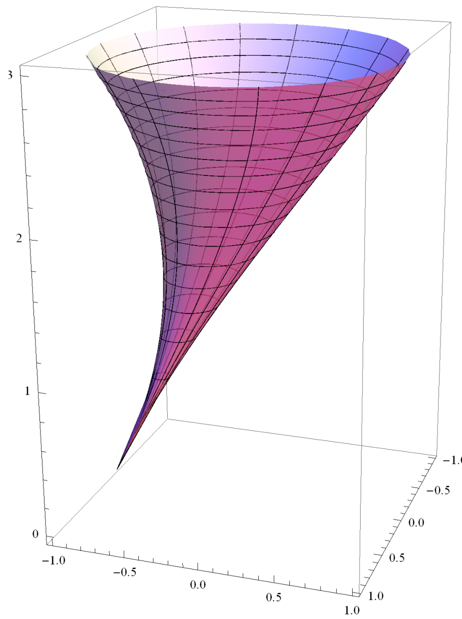
das Oberflächenintegral

$$\int_A \left(x^2 + y^2 \right) d\sigma.$$



2. Eine Künstlerin hat einen eleganten Behälter entworfen. Der Ex-Partner möchte wissen, wieviel Bier hineingeht. Helfen Sie und berechnen Sie das Volumen des gefüllten Horns:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) - \left(1 - \sqrt{4-z}\right)^2 \\ z \end{pmatrix}; \begin{array}{c} 0 \leq r \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 3\sqrt{r} \leq z \leq 3 \end{array} \right\}.$$



3. Wir betrachten $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit

$$f_n(x) = n \sin\left(\frac{x^2}{n}\right).$$

(a) Geben Sie (mit Beweis) zwei Arten von Konvergenz an, so dass f_n konvergiert für $n \to \infty$.

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\lambda$$

und beweisen Sie Ihre Antwort.

4. Wahr oder nicht wahr? Begründen Sie Ihre Antwort:

$$\int_0^{100} x^4 e^{-x^2} dx \leq \left(\int_0^{100} x^6 e^{-x^2} dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^{100} x^3 e^{-x^2} dx \right)^{\frac{2}{3}}.$$

5. Wir betrachten $M = \{(x,y,z)\,;x^2+y^2 \neq 0\}$. Welche der folgende Differentialformen sind exakt und welche geschlossen?

   (a) $ydx + xdy$,

   (b) $ydx - xdy$,

   (c) $\dfrac{y}{x^2+y^2}dx - \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$?

6. Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = x^2.$$

   Wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antworten.

   Dabei sei $\mathcal{E} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ die zur Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ gehörende Borel–σ–Algebra.

   (a) f ist $\mathcal{E}$–$\mathcal{P}(\mathbb{R})$–messbar.

   (b) f ist $\mathcal{A}_\mathcal{T}$–$\mathcal{A}_\mathcal{T}$–messbar.

   (c) f ist $\mathcal{P}(\mathbb{R})$–$\mathcal{E}$–messbar.

7. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

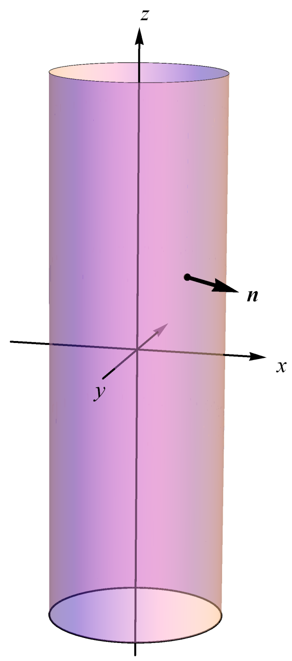
$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^2 + \|x\|^4} \text{ für } x \neq 0.$$

   Für welche $n \in \mathbb{N}^+$ gilt $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$?

8. Sei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X und sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ eine Abbildung.

   (a) Wann heißt μ σ-additiv?

   (b) Wann heißt μ σ-subadditiv?



9. Sei $Z = \{(x,y,z)\,;x^2+y^2 = 1 \text{ und } -\pi \leq z \leq \pi\}$ und

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+\cos z \\ y-x+\cos z \\ \sin z \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie

$$\int_Z (\nabla \times v) \cdot n \; d\sigma.$$

   Hierbei sei n der von der z–Achse weg weisende Normaleneinheitsvektor.

10. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit

$$\Delta u = 0$$

   und jedes beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, für das $\partial\Omega$ eine $(m-1)$–dimensionale Mannigfaltigkeit ist, folgendes gilt:

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n \; d\sigma = 0,$$

   wobei n für den nach außen weisenden Normaleneinheitsvektor steht.