NAME:	AUFGABE 1	

Die Cantormenge C kann man wie folgt definieren: Für $n \in \mathbb{N}$ setzt man

$$C_n := \bigcup_{k\in\mathbb{N},\ 0\leq 2k<3^n} \left[\frac{2k}{3^n}, \frac{2k+1}{3^n}\right] \quad \text{und dann} \quad C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

a. Begründen Sie, dass C nicht abzählbar ist.

b. Liegt C in der Lebesgue-σ-Algebra für $\mathbb{R}$?

c. Bestimmen Sie $\lambda(C)$.

d. Sei λ_2 das zwei-dimensionale Lebesgue-Maß. Bestimmen Sie $\lambda_2\left(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x-y\in C\}\right)$.

NAME:	AUFGABE 2	

Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \dfrac{\sin(1/x)}{x^3}$.

a. Sei $t > 0$. Existiert $\displaystyle\int_{1/t}^{\infty} f \; d\lambda$ als Lebesgue-Integral?

b. Sei $t > 0$. Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_{1/t}^{\infty} f(x) \; dx = \sin(t) - t\cos(t)$.

c. Existiert $\displaystyle\int_{0}^{\infty} f \; d\lambda$ als Lebesgue-Integral?

Name: **Aufgabe 3**

Die Funktionen $f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ sind definiert durch $f_n(x) := (\sin(nx))^{2n}$. Für diese Funktionen gilt

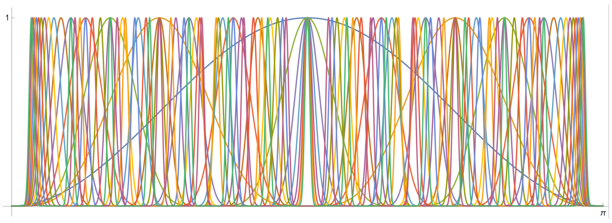
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2(0,\pi)} = 0.$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a. Es gibt $x \in [0,\pi]$ derart, dass $f_n(x)$ divergiert.

b. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^1(0,\pi)} = 0$.

c. Es gilt $f_n \to 0$ nach Lebesgue-Maß auf $[0,\pi]$.

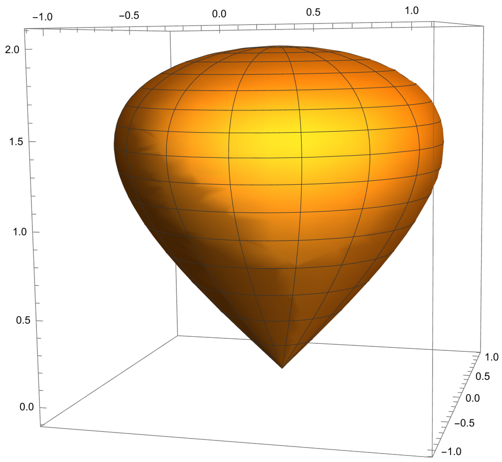


$f_1, f_2, \ldots, f_{15}$

NAME:	AUFGABE 4	

Das Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$G := \left\{ (x,y,z)\,;\, x^2+y^2 < \left(1-\left(\tfrac{1}{2}z\right)^2\right) z^2 \text{ und } z>0 \right\}.$$



a. Finden Sie $S \subset \mathbb{R}^2$ derart, dass der Rand ∂G eindeutig parametrisiert wird durch $\boldsymbol{f} : S \to \mathbb{R}^3$ mit

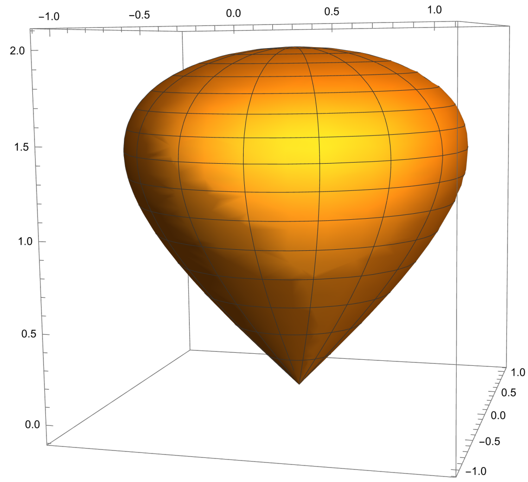
$$\boldsymbol{f}(\varphi,\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(2\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(2\theta) \\ 2\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

b. Stimmt es, dass $G = \{\, r\,\boldsymbol{f}(\varphi,\theta); (\varphi,\theta) \in S \text{ und } 0<r<1 \}$?

NAME:

AUFGABE 5

Sei $G := \left\{ (x, y, z)\, ; x^2 + y^2 < \left(1 - \left(\frac{1}{2}z\right)^2\right) z^2 \text{ und } z > 0 \right\}$ wie in Aufgabe 4 gegeben.



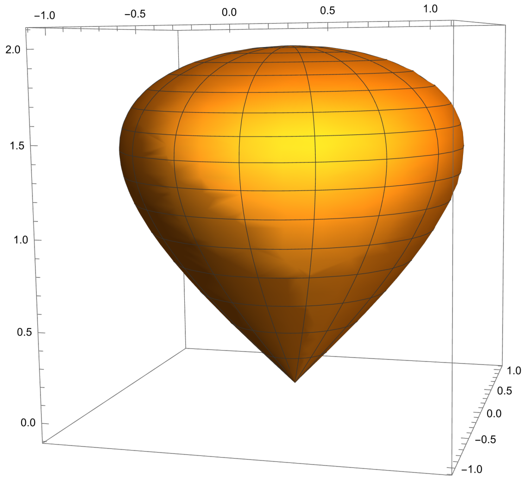
a. Geben Sie ein Integral für das Volumen von G an.

b. Berechnen Sie dieses Volumen.

NAME:

AUFGABE 6

Sei $G := \left\{ (x, y, z)\,;\, x^2 + y^2 < \left(1 - \left(\frac{1}{2}z\right)^2\right) z^2 \text{ und } z > 0 \right\}$ wie in Aufgabe 4 gegeben.



a. Geben Sie ein Integral für den Flächeninhalt von ∂G an.

b. Berechnen Sie dieses Integral.

Name:	Aufgabe 7	

Sei $V = \mathbb{R}^3$.

a. Gibt es $\omega \in \Lambda^1(V^*)$ mit $\quad d\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 - x_2\, dx_1 \wedge dx_3$?

b. Berechnen Sie: $\quad \eta := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \lrcorner\ (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$.

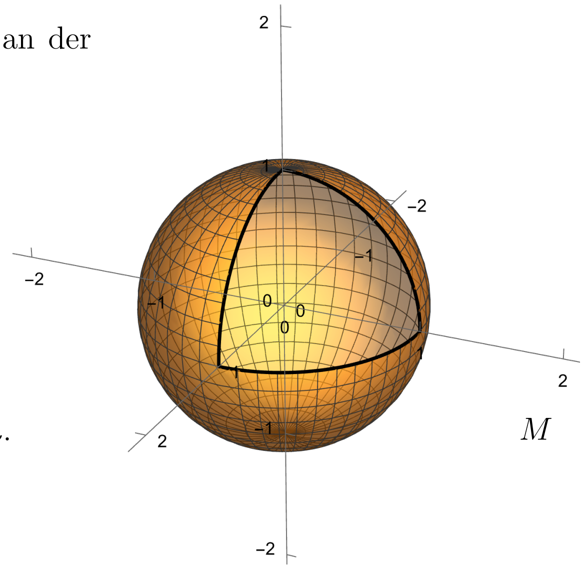
NAME: AUFGABE 8

Rechts steht eine Skizze von $M := S \setminus \text{Oktant}_1$. Wir schreiben $x = (x_1, x_2, x_3)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$,

$$S := \left\{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\right\} \text{ und } \text{Oktant}_1 := \left\{x \in \mathbb{R}^3; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\right\}.$$

Sei $\boldsymbol{n}(x)$ der nach außen zeigende Normalenvektor auf M an der Stelle $x \in M$ und sei

$$\boldsymbol{h}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_3)^T.$$



M

a. Berechnen Sie: $\displaystyle\iint_M (\nabla \times \boldsymbol{h}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$.

b. Berechnen Sie auch: $\displaystyle\iint_M \nabla \cdot \boldsymbol{h}\, d\sigma$.

PS. Andere Notationen: $\nabla \times \boldsymbol{h} = \operatorname{rot} \boldsymbol{h}$ und $\nabla \cdot \boldsymbol{h} = \operatorname{div} \boldsymbol{h}$.