Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel

WS 23/24

Analysis 3

Übungsblatt 0

Dieses Aufgabenblatt wird nicht korrigiert, aber in den ersten Übungen in der 2. Semesterwoche besprochen.

Aufgabe 1:

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt offen, wenn es für alle $a \in A$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt derart, dass $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$.
Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt offen, wenn es für alle $b \in B$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt derart, dass $\{x \in \mathbb{R}^2; \|x-b\| < \varepsilon\} \subset B$.

(a) Zeigen Sie, dass $B \subset \mathbb{R}^2$ offen ist, genau dann wenn es für alle $b \in B$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt derart, dass $\{x \in \mathbb{R}^2; |x_1 - b_1| + |x_2 - b_2| < \varepsilon\} \subset B$.

(b) Sei $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die erste, bzw. zweite Koordinate. Wahr oder nicht wahr:

- Wenn $B \subset \mathbb{R}^2$ offen ist, dann sind $p_1(B)$ und $p_2(B)$ offen in $\mathbb{R}$.
- Wenn $p_1(B)$ und $p_2(B)$ offen in $\mathbb{R}$ sind, dann ist $B \subset \mathbb{R}^2$ offen in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2: (a) Begründen Sie, dass das Volumen der Einheitskugel $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| < 1\}$ in $\mathbb{R}^3$ wie folgt ist:

$$Vol(B_1(0)) = \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - z^2\right) dz.$$

(b) Begründen Sie, dass das Volumen der Kugel $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| < R\}$ in $\mathbb{R}^3$ mit Radius R wie folgt ist:

$$Vol(B_R(0)) = R^3 Vol(B_1(0)).$$

(c) Begründen Sie, dass der Flächeninhalt der Sphäre $S_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = R\}$ in $\mathbb{R}^3$ mit Radius R wie folgt ist:

$$Fl(S_R(0)) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{Vol(B_{R+\varepsilon}(0)) - Vol(B_R(0))}{\varepsilon}.$$

(d) Berechnen Sie $Vol(B_R(0))$ und $Fl(S_R(0))$.

Aufgabe 3: Berechnen Sie das Volumen von K, wobei

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + z^2 \leq 2\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ y^2 + z^2 \leq 2\}.$$

Aufgabe 4: Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a)
$$\int_{[2,4]\times[1,3]\times[-1,3]} \frac{2z}{(x+y)^2} d(x,y,z)$$

(b)
$$\int_D \frac{\sin(x)}{x} d(x,y),$$

wobei D, die von dem Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ eingeschlossene Menge ist.

(c)
$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} d(x,y) \text{ und } \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} d(y,x)$$

(d)
$$\int_{[0,1]^2} (x+y)|x-y| d(x,y)$$