Prof. Dr. Guido Sweers **WS 23/24**
Dr. Aleksey Sikstel

Analysis 3

Übungsblatt 1

Die Lösungen müssen in den entsprechenden Kasten im Studierendenraum 3. Stock MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 19.10., um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**:**
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $A \subset X$ definieren wir

$$\partial A := \{x \in X;\ \text{für jedes } T \in \mathcal{T} \ \text{ mit } x \in T \ \text{ gilt } A \cap T \neq \emptyset \text{ und } (X \setminus A) \cap T \neq \emptyset\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für jedes $A \subset X$ gilt:
$$A \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset.$$

(b) Für jedes $A \subset X$ gilt:
$$(X \setminus A) \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \partial A \subset A.$$

Aufgabe 2: Die Tangens-Funktion ist stetig auf ihrem Definitionsgebiet

$$D := \mathbb{R} \setminus \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(a) Kann man $\tan : D \to \mathbb{R}$ erweitern zu einer stetigen Funktion von $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ nach $(\mathbb{R}, |\cdot|)$?

(b) Kann man $\tan : D \to \mathbb{R}$ erweitern zu einer stetigen Funktion wenn man $|\cdot|$ ersetzt durch eine andere Metrik $d(\cdot, \cdot)$? *Hinweis*: Beispiel 1.6 aus dem Skript.

(c) Geht das auch für $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ nach $(\mathbb{R}, d(\cdot, \cdot))$?

Aufgabe 3: Wir betrachten $d_1(x, y) = \left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \right|$ und $d_2(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

(a) Beweisen Sie, dass d_1 und d_2 Metriken auf $\mathbb{R}$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass d_1 und d_2 jeweils die Standardtopologie erzeugen.

(c) Untersuchen Sie, ob $(\mathbb{R}, d_1)$ und $(\mathbb{R}, d_2)$ vollständig sind. Dabei heißt ein metrischer Raum $(\mathbb{R}, d)$ vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

Hinweis: Bei der Definition der Begriffe Cauchyfolge und Konvergenz in einem metrischen Raum wird die Metrik $d(\cdot, \cdot)$ genauso verwendet wie die Norm im normierten Raum.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)**:** Wir wollen zeigen, dass die Mengen $\mathcal{P}(X)$ und $\{0,1\}^X$ durch eine Bijektion verbunden sind. Wenn $A \in \mathcal{P}(X)$, dann definiert man $\mathbf{1}_A \in \{0,1\}^X$ als die Indikatorfunktion für A und man definiert die Funktion $B : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$ durch

$$B(A) := \mathbf{1}_A \text{ für alle } A \in \mathcal{P}(X).$$

Zeigen Sie, dass für $B^{inv} : \{0,1\}^X \to \mathcal{P}(X)$ mit

$$B^{inv}(f) := f^{-1}(1) \text{ für alle } f \in \{0,1\}^X$$

gilt, dass:

(a) $B^{inv} \circ B(A) = A \quad \text{für alle } A \in \mathcal{P}(X)$,

(b) $B \circ B^{inv}(f) = f \quad \text{für alle } f \in \{0,1\}^X$.

Aufgabe 5 (3+3+1 Punkte)**:** Sei $\Omega = (a,b]$ mit $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und $a < b$. Wir betrachten die Klasse $\mathcal{A}((a,b])$ bestehend aus endlichen Vereinigungen $\bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j]$, $n \in \mathbb{N}$, von halboffenen Intervallen $(a_j, b_j] \subset (a,b]$ mit $a \leq a_j < b_j \leq b$.

(a) Zeigen Sie, dass jedes $A \in \mathcal{A}((a,b])$ sich als eine endliche Vereinigung $A = \bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j]$ von paarweise disjunkten Intervallen $(a_j, b_j]$ schreiben lässt.

(b) Zeigen Sie, dass die Darstellung von A aus a) eindeutig bestimmt ist, wenn man zusätzlich annimmt, dass $a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n \leq b$.

(c) $\mathcal{A}((a,b])$ ist keine σ-Algebra. Geben Sie als Gegenbeispiel eine Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $A_j \in \mathcal{A}((a,b])$ an, für die $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \notin \mathcal{A}((a,b])$ gilt (kein Beweis erforderlich!).

Aufgabe 6: Wir betrachten für $X = \{1,2,3,4\}$ die folgenden Mengensysteme:

- $M_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{2,4\}\}$
- $M_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$
- $M_3 = \{\emptyset, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$

(a) Welche der Mengensysteme sind Topologien?

(b) Welche der Mengensysteme sind Basis einer Topologie? Geben Sie auch die dazugehörigen Topologien an.

(c) Welche der Topologien (auch die von einer Basis erzeugten) haben die Hausdorff-Eigenschaft?

Aufgabe 7 (1+2 Punkte)**:** Sei Ω eine endliche oder abzählbar unendliche Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra darüber. Für jedes $\omega \in \Omega$ sei $A(\omega) := \{\eta \in \Omega : \ w \in B \Rightarrow \eta \in B \quad \forall B \in \mathcal{A}\}$.

(a) Berechnen Sie $A(\omega)$ für $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset,\ \Omega,\ \{1\},\ \{2,3\}\}$ und alle $\omega \in \Omega$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle ω, $\eta \in \Omega$ gilt $A(\omega) = A(\eta)$ oder $A(\omega) \cap A(\eta) = \emptyset$.