Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel **WS 23/24**

Analysis 3

Übungsblatt 10

Die Lösungen müssen in den entsprechenden Kasten im Studierendenraum 3. Stock MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 21.12., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1 (3+4 Punkte)**:** Die stereographische Projektion ist gegeben durch

$$p:\ \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2, \quad p(x_1,x_2,x_3) := \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right).$$

(a) Ermitteln Sie p^{-1}.

(b) Zeigen Sie, dass Kreise auf $\mathbb{S}^2$ durch den Nordpol $(0,0,1)$ auf Geraden und alle anderen Kreise auf $\mathbb{S}^2$ auf Kreise abgebildet werden.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**:** Sei $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = 1, y^2+z^2 = 1\}$. Bestimmen Sie alle 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$, die $M := A \setminus \{(0,-1,0),(0,1,0)\}$ bildet.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**:** Sei $D := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ x_1,x_2,x_3,x_4 > 0\}$ und $f:\ D \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} x_1x_3 - x_2^2 \\ x_2x_4 - x_3^2 \\ x_1x_4 - x_2x_3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $M := \{x \in D :\ f(x) = 0\}$ eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist und geben Sie p an.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass $M \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Menge $U_x \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f:\ U_x \to \mathbb{R}^{n-m}$ gibt, so dass

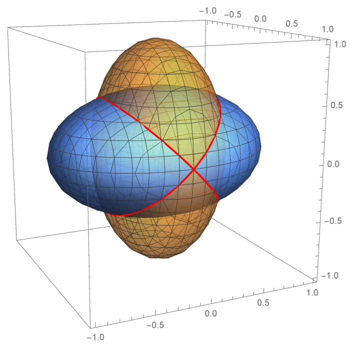
$$\mathrm{Rand}(\nabla f) = n - m \text{ und } M \cap U_x = \{y \in U_x :\ f(y) = 0\}.$$

Aufgabe 5: Integrieren Sie die Funktion $f(x,y,z) = |\cos(z)$ über

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = \sin^2(z), \; \text{wobei } z \in [-\pi, \pi]\}.$$

Aufgabe 6: Die Schnittmenge von A und B mit

$$A := \{(x,y,z) : \; 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1\}$$
$$B := \{(x,y,z) : \; 2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1\}$$



kann wie im nebenstehenden Bild durch zwei glatte Kurven beschrieben werden.

(a) Finden Sie Parametrisierungen beider Kurven.

(b) Berechnen Sie die Länge dieser Kurven.

Aufgabe 7 (5 Punkte)**:** Bestimmen Sie das 3-dimensionale Volumen in $\mathbb{R}^4$ von

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \; x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 + 1 < 5\},$$

wenn man

$$x = \begin{pmatrix} \sqrt{r^2+1}\cos\varphi \\ \sqrt{r^2+1}\sin\varphi \\ r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

als Parametrisierung nimmt.

Aufgabe 8: Wir betrachten

$$G = \{(x,y,z) : \; z = x^2 - y^2\} \text{ und } Z = \{(x,y,z) : \; x^2 + y^2 = 1\}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Integraldarstellung für den Flächeninhalt des Teils von G, der innerhalb von Z liegt.

(b) Bestimmen Sie eine Integraldarstellung für die Länge der Schnittmenge.