Prof. Dr. Guido Sweers **WS 23/24**
Dr. Aleksey Sikstel

Analysis 3

Übungsblatt 11

Die Lösungen müssen in den entsprechenden Kasten im Studierendenraum 3. Stock MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 11.1., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass $M \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wenn es lokal als Graph einer C^1-Funktion $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ geschrieben werden kann.

Das heißt, an jedem Punkt $y \in M$ existieren, nach eventuellem Umsortieren der Koordinaten, offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^{n-m}$ und eine C^1-Funktion $F : U \to V$ so, dass $y \in U \times V$ und

$$M \cap (U \times V) = \{(x, F(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in U\}.$$

Aufgabe 2 (2 Punkte)**:** Betrachten Sie die folgenden offenen Teilmengen des $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$:

$$U = \{(\cos\alpha, \sin\alpha : \alpha \in (0, 2\pi))\}, \quad V = \{(\cos\alpha, \sin\alpha : \alpha \in (-\pi, \pi))\}.$$

Zeigen Sie, dass $A = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ mit

$$\begin{aligned} \varphi : U \to \mathbb{R}, &\quad \varphi(\cos\alpha, \sin\alpha) = \alpha, \quad \alpha \in (0, 2\pi), \\ \psi : V \to \mathbb{R}, &\quad \psi(\cos\alpha, \sin\alpha) = \alpha, \quad \alpha \in (-\pi, \pi), \end{aligned}$$

ein Atlas auf $\mathbb{S}^1$ ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**:** Definieren Sie einen Atlas auf der zylindrischen Fläche

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2, 0 < z < h\right\}$$

mit $h, r \in \mathbb{R}^+$.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)**:** Gegeben seien die Abbildungen

(a) $f(x, y) = (\lambda x + e^x + e^y,\ \lambda y + e^x + e^y)$,

(b) $f(x, y) = (x + e^y,\ \lambda y + e^x)$.

Finden Sie jeweils diejenigen λ für die f ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 5: Zeigen Sie:

(a) Jede stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (0, 1) \to \mathbb{R}^n$ mit $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in (0, 1)$ ist eine Immersion.

(b) Ist $\alpha : (0,1) \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (r(t), z(t))$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $\dot\alpha(t) \neq 0$ und $r(t) > 0$ für alle $t \in (0,1)$, dann ist

$$\gamma(s,t) := \begin{pmatrix} r(s)\cos(t) \\ r(s)\sin(t) \\ z(s) \end{pmatrix}$$

eine Immersion.

Aufgabe 6 (2+0+2 Punkte)**:** An welchen Punkten sind die folgenden Abbildungen Immersionen?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (\cos(2t), \sin(2t), t)$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t^2, t^3)$.

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(s,t) := (st + t, s - st, s + st)$

Aufgabe 7 (3+0+5 Punkte)**:** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(r,\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi)(1 + r\cos(\frac{\varphi}{2})) \\ \sin(\varphi)(1 + r\cos(\frac{\varphi}{2})) \\ r\sin(\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}.$$

Das Möbiusband $M \subset \mathbb{R}^3$ ist dann gegeben durch

$$M := \left\{ f(r,\varphi), : r \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie durch Angabe von lokalen Parametrisierungen, dass M eine C^k-Mannigfaltigkeit der Dimension 2 ist. Zeigen Sie insbesondere die Stetigkeit der jeweiligen Inversen.

(b) Sei $\tilde M := f(\{0\} \times (0, 2\pi)) \subset M$. Bestimmen Sie eine von $p \in \tilde M$ abhängige Basis $\{(p, v_1), (p, v_2)\}$ des Tangentialraums $T_p(M)$.

(c) Zeigen Sie, dass M nicht orientierbar ist.

Aufgabe 8: Ist die jeweilige Menge eine Mannigfaltigkeit? Wenn ja ist sie orientierbar?

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} (2+\cos\varphi)\cos\theta \\ (2+\cos\varphi)\sin\theta \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \theta, \varphi \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} (1+2\cos\varphi)\cos\theta \\ (1+2\cos\varphi)\sin\theta \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \theta, \varphi \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} \cos t \cos s \\ \sin t \cos s \\ \cos t \sin s \\ -\sin t \sin s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : s, t \in \mathbb{R} \right\}$