Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel

WS 23/24

Analysis 3

Übungsblatt 13 (BONUS)

Die Lösungen müssen in den entsprechenden Kasten im Studierendenraum 3. Stock MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 25.1., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Die Punkte die Sie auf diesem Blatt erreichen können zählen als Bonus, d.h. Sie brauchen 120 Punkte zum Erreichen der Zulassung.

Aufgabe 1: Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix. Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus 0 \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(v) = \frac{v \cdot Av}{v \cdot v}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine beschränkte Funktion ist, d.h., dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$|f(v)| < c$$

für alle $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\nabla f(v)$.

(c) Begründen Sie, dass es ein $v_{max} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v_{max}\| = 1$ gibt, sodass

$$f(v_{max}) = \sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f(v)$$

gilt.

(d) Zeigen Sie, $\nabla f(v_{max}) = 0$.

(e) Zeigen Sie, dass v_{max} ein Eigenvektor von A mit Eigenwert $f(v_{max})$.

Aufgabe 2: Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ und $v \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Vektor. Zeigen Sie:

(a) $\text{rot}(F \times v) = \partial_v F - (\text{div} F)v$

(b) $\text{div}\,\text{rot} F = 0$

(c) $\text{rot} \nabla f = 0$

(d) $\text{rot}\,\text{rot} F = \nabla(\text{div} F) - \Delta F$

(e) $\text{rot}(fF) = f \text{rot} F + (\nabla f) \times F$

Aufgabe 3 (5 Punkte)**:** Sei Q ein Tetraeder mit den Eckpunkten $(0,0,0)$, $1,0,0$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ und

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - 2z \\ 3z - 4x \\ 5x + y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_Q \nabla \cdot v \, dV$ mit dem Satz von Gauß.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**:** Sei C eine geschlossene Kurve und

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes, dass das Integral $\int_C v \cdot \boldsymbol{\tau} ds$ gleich Null ist, wobei $\boldsymbol{\tau}$ der Tangentialvektor, der sich zur Normalen der Kurve C links herum dreht.

Aufgabe 5 (5 Punkte)**:** Sei $v(x,y,z) = (3y, -xz, yz^2)$ sowie die Fläche F mit $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, die durch die Ebene $z = 2$ begrenzt wird und C die dazugehörige Randkurve mit der Parametrisierung $r(t) = 2\cos t, 2\sin t, 2)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Bestimmen Sie die Integrale $\int_C v \cdot \boldsymbol{\tau} ds$ und $\int\int_M (\nabla \times v) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$, wobei $\boldsymbol{n}$ der Normalenvektor zu C ist und $\boldsymbol{\tau}$ der Tangentialvektor, der sich links herum dreht.

Aufgabe 6 (5 Punkte)**:** Ein Heißluftballon H habe die Form einer Sphärenkappe vom Radius Öffnungsdurchmesser, d.h. $H = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 = R, -a \leq z \leq R\}$ mit $a > 0$ und $d = 2\sqrt{R^2 - a^2}$. Das heisse Gas dringt durch die poröse Oberfläche mit der Geschwindigkeit $v = \mathrm{rot} F$, $\quad F(x,y,z) = (-y, x, 0)$. Berechnen Sie den Fluss $\int_H v \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$ durch die Ballonoberfläche.

Aufgabe 7: Sei $M = \{(x,y,z): 0 < z = 1 - x^2 - y^2\}$ und $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-x \\ z^2+x^2+y^2 \end{pmatrix}$. Weiter sei $\mathbf{n}$ das hinauf gerichtete Normalenvektorfeld und $\mathrm{d}\sigma$ das Oberflächendifferential. Berechnen Sie mit dem Satz von Stokes

$$\int_M (\nabla \times v) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}\sigma.$$

Aufgabe 8: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\partial U \in C^1$. Weiter sei $\mathbf{n}$ der auswärts gerichtete Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$ und $\mathrm{d}\sigma$ das Oberflächendifferential. Zeigen Sie:

(a) Für $u \in C^1(\overline{U})$ und $i \in \{1,\dots,n\}$ gilt: $\displaystyle\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i} \mathrm{d}\lambda = \int_{\partial U} u\mathbf{n}_i \mathrm{d}\sigma$

(b) Für $u, v \in C^1(\overline{U})$ und $i \in \{1,\dots,n\}$ gilt: $\displaystyle\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i} v \mathrm{d}\lambda = -\int_U u\frac{\partial v}{\partial x_i} v\mathrm{d}\lambda + \int_{\partial U} uv\mathbf{n}_i \mathrm{d}\sigma$

(c) Für $u \in C^2(\overline{U})$ gilt: $\displaystyle\int_U \Delta u \mathrm{d}\lambda = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}\sigma$

(d) Für $u, v \in C^2(\overline{U})$ gilt: $\displaystyle\int_U \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}\lambda = -\int_U u\Delta v \mathrm{d}\lambda + \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}\sigma$