Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel **WS 23/24**

Analysis 3

Übungsblatt 2

Die Lösungen müssen in den entsprechenden Kasten im Studierendenraum 3. Stock MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 26.10., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1 (2+0+2+0 Punkte)**:** Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ Borelmengen sind (Borelmengen sind die Mengen in der Borel-σ-Algebra die alle standard offenen Mengen enthält):

(a) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$,

(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2+1}\right]$,

(c) die Menge A aller Zahlen $x \in [0, 1)$, in deren Dezimaldarstellung eine Ziffer "3" vorkommt,

(d) die Menge B aller Zahlen $x \in [0, 1)$, in deren Dezimaldarstellung unendlich oft die Ziffer "3", aber nur endlich oft die Ziffer "4" vorkommt.

Aufgabe 2: Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$, $g(z) = |z| - 1$ und

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}.$$

Geben Sie $f^{-1}(A)$ und $g^{-1}(A)$ an.

Aufgabe 3: Wir betrachten $\mathbb{N}$ mit der Topologie

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{\text{ungerade Zahlen in } \mathbb{N}\}, \{\text{gerade Zahlen in } \mathbb{N}\}, \mathbb{N}\}.$$

Seien weiterhin die Funktionen $f(n) = n^2$ und $g(n) = 2n + 1$ gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass f und g $\mathcal{A}_\mathcal{T}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar sind.

Aufgabe 4: Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion.

(a) Sei J eine Menge und $Y_j \subset Y$ für alle $j \in J$. Beweisen Sie, dass

$$\bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right), \quad \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j) = f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right)$$

(b) Sei I eine Menge und $X_i \subset X$ für alle $i \in I$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$\bigcup_{i\in I} f(X_i) = f\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right), \quad \bigcap_{i\in I} f(X_i) = f\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right).$$

Aufgabe 5 (3+1+2 Punkte)**:** Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und die metrischen Räume $(X, d_1(\cdot,\cdot))$ und $(Y, d_2(\cdot,\cdot))$ gegeben. Sei $a \in X$. Wir definieren 'f ist stetig in a als Funktion von $(X, d_1(\cdot,\cdot))$ nach $(Y, d_2(\cdot,\cdot))$', wenn:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ \forall \tilde{x} \in X: \ d_1(x, \tilde{x}) < \delta \implies d_2(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon. \tag{1}$$

Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ die durch d_1 und d_2 induzierte Topologien. Wir betrachten nun $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ und definieren 'f ist $\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2$-stetig in a' durch:

$$\forall T_2 \in \mathcal{T}_2 \text{ mit } f(a) \in T_2 \ \exists T_1 \in \mathcal{T}_1 \text{ mit } a \in T_1 \subset f^{-1}(T_2). \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass (1) $\iff$ (2).

(b) Wenn (2) für alle $a \in X$ gilt, dann ist $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ stetig.

(c) Ist (1) oder (2) äquivalent zu der folgenden Aussage?

$$\forall T_2 \in \mathcal{T}_2 \text{ mit } f(a) \in T_2 \text{ gilt } f^{-1}(T_2) \in \mathcal{T}_1. \tag{3}$$

Aufgabe 6 (2+2 Punkte)**:** Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in $\mathcal{A}$, so gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

(b) Jede abzählbare Vereinigung von μ-Nullmengen ist wieder eine μ-Nullmenge.

Aufgabe 7: Seien $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ messbare Räume. Sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ und $\mathcal{A}_\mathcal{B}$ sei die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{B}$ enthält.

Beweisen Sie, dass $f: X \to Y$ genau dann eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_\mathcal{B}$-messbare Abbildung ist, falls gilt:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \text{für alle} \quad B \in \mathcal{B}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\{B \in \mathcal{A}_\mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$.

Aufgabe 8 (2+2+2 Punkte)**:** Wir definieren für $a > 0$ die Funktionen $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_a(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp\left(-ax^2\right).$$

Zeigen Sie:

(a) $\int_\mathbb{R} f_a(x)dx = 1$ für alle $a > 0$.

(b) $\lim_{a\downarrow 0} \int_\mathbb{R} f_a(x)g(x)dx = g(0)$ für jede stetige beschränkte Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(c) $\int_\mathbb{R} f_a(y)f_b(x-y)dy = f_c(x)$ für alle $a, b > 0$ und $c = \frac{ab}{a+b}$.