Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel **WS 23/24**

Analysis 3

Übungsblatt 3

Die Lösungen müssen in den entsprechenden Kasten im Studierendenraum 3. Stock MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 2.11., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{, falls } x \in \mathbb{Q} \text{ und } x = \frac{p}{q}, \text{ wobei } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N}^+ \text{ teilerfremd sind,} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

(a) Es seien folgende Mengen gegeben:

$$A_1 = (0,1) \qquad A_2 = \{1\} \qquad A_3 = \left(1, \frac{5}{4}\right)$$
$$B_1 = (0,1) \qquad B_2 = (-1,1) \qquad B_3 = \left(1, \frac{5}{4}\right)$$

Geben Sie $f(A_i)$ und $f^{-1}(B_i)$ für $i \in \{1,2,3\}$ an.

(b) Zeigen Sie: f ist $\mathcal{A}_\mathcal{T}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar, wobei $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ hier die Borel-σ-Algebra der offenen Mengen der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ ist

Aufgabe 2: $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ enthalte alle (nach Standardtopologie) offenen Mengen von $\mathbb{R}$ und $\mathcal{P}([0,\infty))$. Weiter sei $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ die dazu gehörende σ-Algebra. Zeigen Sie:

(a) $f(x) = 2x$ ist $\mathcal{A}_\mathcal{S}$-$\mathcal{A}_\mathcal{S}$-messbar.

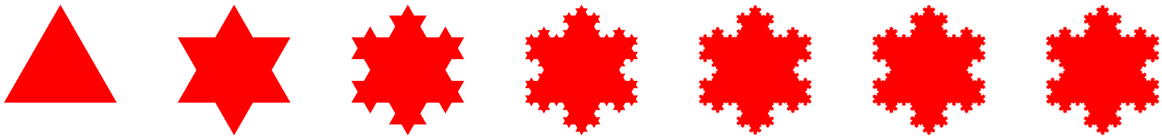
(b) $f(x) = 1$ ist $\mathcal{A}_\mathcal{S}$-$\mathcal{A}_\mathcal{S}$-messbar.

(c) $f(x) = 2x + 1$ ist nicht $\mathcal{A}_\mathcal{S}$-$\mathcal{A}_\mathcal{S}$-messbar.

Hinweis: Es gibt Mengen in $(0,1)$, die nicht Borel-messbar sind.

Aufgabe 3 (1+1+2+2+2+2 Punkte)**:**

Die Koch-Kurve wird aufgebaut durch jeweils bei einer Kante in drei Stücke zu teilen und das mittlere Drittel zu ersetzen durch zwei nach Außen gerichtete neue Kanten mit Länge ein Drittel der alten Kante. Man fängt an mit einem gleichseitigen Dreieck mit Kanten der Länge 1.



(a) Zeigen Sie, dass man die Koch-Kurve überdecken kann mit 3 abgeschlossenen Kreisen mit Diameter 1.

(b) Zeigen Sie, dass man die Koch-Kurve überdecken kann mit 12 abgeschlossenen Kreisen mit Diameter $\frac{1}{3}$.

(c) Zeigen Sie, dass man die Koch-Kurve überdecken kann mit 3×4^n abgeschlossenen Kreisen mit Diameter $\frac{1}{3^n}$.

(d) Setzen wir
$$\rho_n(d) = 3 \times 4^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^d.$$
Für welches d gilt $\lim_{n\to\infty} \rho_n(d) \in \mathbb{R}^+$?

(e) Welche Hausdorffdimension d_{KK}, vermuten Sie, hat die Koch-Kurve?

(f) Können Sie d_{KK} nach unten oder nach oben abschätzen?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**:** Sei $(X, \mathcal{B})$ ein Maßraum mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$. Zeigen Sie für die Vektorfunktion $f := (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$, dass falls f Borel-messbar ist, so sind f_i für $i = 1, \ldots, n$ Borel-messbar.

Aufgabe 5 (3+3 Punkte)**:** Sei $(X, \mathcal{B})$ ein Maßraum und μ und ν seien Maße darauf.

(a) Ist die durch
$$(\mu + \nu)(T) := \mu(T) + \nu(T)$$
für $T \in \mathcal{B}$ definierte Abbildung ein Maß?

(b) Ist die durch
$$(\mu * \nu)(T) := \max(\mu(T), \nu(T))$$
für $T \in \mathcal{B}$ definierte Abbildung ein Maß?

Aufgabe 6: Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir nennen eine Menge $A \in \mathcal{A}$ ein μ-Atom, wenn $\mu(A) > 0$ ist und für jedes $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$ entweder $\mu(B) = 0$ oder $\mu(A \backslash B) = 0$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Sind A, B μ-Atome, so gilt $\mu(A \cap B) = 0$ oder $\mu((A \cup B) \backslash (A \cap B)) = 0$.

(b) Ist A ein μ-Atom und $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$, so gilt $\mu(B) = 0$ oder $\mu(B) = \mu(A)$.

(c) Ist $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$ und gilt für jedes $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$ entweder $\mu(B) = 0$ pder $\mu(B) = \mu(A)$, so ist A ein μ-Atom.