Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel

WS 23/24

Analysis 3

Übungsblatt 4

Die Lösungen müssen in den entsprechenden Kasten im Studierendenraum 3. Stock MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 9.11., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ offen $\Rightarrow \lambda(A) > 0$.

(b) $\lambda(A) > 0 \Rightarrow A^\circ \neq \emptyset$.

(c) $A \subset \mathbb{R}$ abzählbar $\Rightarrow \lambda(A) = 0$.

(d) $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar, $\lambda(A) = 0 \Rightarrow \lambda(\overline{A}) = 0$.

(e) $\lambda(A) = 0 \Rightarrow A$ ist abzählbar.

(f) $d(A_1, A_2) > 0 \Rightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

(g) $A_1 \cup A_2 = \emptyset \Rightarrow d(A_1, A_2) > 0$.

(h) $A \subset \mathbb{R}$ und $\lambda^*(A) = 0 \Rightarrow$ A ist Lebesgue-messbar.

Aufgabe 2: Begründen Sie anschaulich, warum das Lebesgue-Maß verschiebungs- und rotationsinvariant ist

Aufgabe 3: Sei $d(\cdot, \cdot)$ die Distanzfunktion zweier Mengen in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Man beweise oder wiederlege:

(a) $d(x, A) \geq d(y, A) - \|x - y\|$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

(b) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

(c) $d(A \cup B, C) \leq \min(d(A, C), d(B, C))$ für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

(d) $d(A \cap B, C) \leq \max(d(A, C), d(B, C))$ für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 4: Für jede Menge $A \in \mathcal{L}$ gibt es kompakte Mengen K_n und offene Mengen O_n mit $K_n \subset A \subset O_n$ und

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) = \lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(O_n).$$

Konstruiere solche Mengen für

(a) $A = \mathbb{R}$,

(b) $A = \mathbb{Q}$,

(c) $A = C$, die Cantormenge,

(d) $A = C^*$, die fette Cantormenge.

Aufgabe 5: Im Allgemeinen gibt es für $A \in \mathcal{L}$ weder offene Mengen $O_n \subset A$ mit $\lim_{n\to\infty} \lambda(O_n) = \lambda(A)$ noch kompakte Mengen $K_n \supset A$ mit $\lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) = \lambda(A)$.

Geben Sie Beispiele zweier Mengen $A \in \mathcal{L}$, bei der das Lebesgue-Maß sich so nicht approximieren lässt.

Aufgabe 6 (3+3+3 Punkte)**:** Sei $C \subset [0,1]$ die Cantormenge, d.h.

$$C := [0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right).$$

Zeigen Sie:

(a) Jedes $x \in C$ besitzt eine *triadische Darstellung*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} 2x_k 3^{-k} \tag{1}$$

mit $x_i \in \{0,1\}$ für $i = 1, \ldots, \infty$.

(b) Ist $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ abzählbar?

(c) C hat Hausdorffdimension $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

Aufgabe 7 (1+1+3+1+1 Punkte)**:** Sei $C \subset [0,1]$ die Cantormenge. Aus Aufgabe 6 wissen wir, dass jedes $x \in C$ die Darstellung (1) besitzt. Damit definieren wir die Funktion

$$F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot 2^{-k}$$

auf C und setzen sie durch

$$F(y) := \sup\{F(x) : \ x \in C, x \leq y\}$$

zu einer Funktion $F : \ [0,1] \to [0,1]$ fort. Zeigen Sie:

(a) F ist stetig.

(b) F ist monoton wachsend.

(c) F ist für kein $x \in C$ differenzierbar.

(d) F ist für alle $x \in [0,1] \setminus C$ differenzierbar mit $F'(x) = 0$.

(e) F ist surjektiv.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**:** Beweisen Sie, dass die Menge $\{f(x) : \ x \in A\}$ mit $A = \{x \in \mathbb{R} : \ f'(x) = 0\}$ für eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue'sche Nullmenge ist.