Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel **WS 23/24**

Analysis 3

Übungsblatt 5

Die Lösungen müssen in den entsprechenden Kasten im Studierendenraum 3. Stock MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 16.11., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: Sei $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wahr oder Falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) f Riemann-integrierbar $\Rightarrow$ f Lebesgue-integrierbar.

(b) f Lebesgue-integrierbar $\Rightarrow$ f Riemann-integrierbar.

(c) f uneigentlich Riemann-integrierbar $\Rightarrow$ f Lebesgue-integrierbar.

(d) f Lebesgue-integrierbar $\Rightarrow$ f uneigentlich Riemann-integrierbar.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**:** (a) Zeigen Sie, dass wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einfach und stetig ist, so gilt $f \equiv const.$

(b) Zeigen Sie, dass $f = \mathbf{1}_{[-1,1]} + 3 \cdot \mathbf{1}_{[-2,2]} + \mathbf{1}_{[0,\infty)} - \mathbf{1}_{[3,\infty)}$ eine einfache, nicht-negative Lebesgue-messbare Funktion ist und berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$.

Aufgabe 3: Konstruieren Sie einfache Funktionen $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq g_n(x)$ und ausserdem

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n(x)\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} g_n(x)\, d\lambda$$

Hinweis: Es gilt $(0,1) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [(1-\varepsilon)^{2(k+1)}, (1-\varepsilon)^{2k})$ für alle $\varepsilon \in (0,1)$.

Aufgabe 4: Die Funktion $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei für $r \in (0,1)$ und $\phi \in \left(\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}\right]$ mit $n \in \mathbb{N}^+$ definiert durch

$$f(r\cos\phi, r\sin\phi) = \sqrt{n}.$$

Zeigen Sie, dass f Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 5: Die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ sei für $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ mit $n \in \mathbb{N}^+$ stückweise definiert durch

$$f(x) = (-1)^n \frac{1}{x}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^1 f(x)dx$ existiert.

(b) Zeigen Sie, dass f nicht Lebesgue-integrierbar über $(0,1]$ ist.

Aufgabe 6 (2+1 Punkte)**:**

(a) Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist f' dann messbar?
Hinweis: Wenn f differenzierbar ist, so gilt $f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$.

(b) Existiert eine nicht-messbare Funktion $f \geq 0$ sodass aber $\sqrt{f}$ messbar ist?

Aufgabe 7 (1+2+2+2 Punkte)**:** Sei $f : \mathbb{R} \to [-\infty,\infty]$ eine Lebesgue-messbare Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}) = 0 \;\Rightarrow\; \int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 0$$

in den folgenden Fällen gilt:

(a) $f = \mathbf{1}_E$ mit $E \in \mathcal{L}$.

(b) f ist einfach, nicht-negativ und Lebesgue-messbar.

(c) f ist nicht-negativ und Lebesgue-messbar.

(d) f ist Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 8 (3+3 Punkte)**:** Sei $f \geq 0$ beschränkt und messbar auf $\Omega \subset \mathbb{R}$, und Φ die Menge aller einfachen, messbaren Funktionen auf Ω mit $f \leq \phi$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Sei $\Omega = [0,1]$, dann:

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = \inf_{\phi\in\Phi} \int_{[0,1]} \phi \, d\lambda.$$

(b) Sei $\Omega = \mathbb{R}$, dann:

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \inf_{\phi\in\Phi} \int_{\mathbb{R}} \phi \, d\lambda.$$

Aufgabe 9: Sei $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ und $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \mathbf{1}_A(x)$. Dann existiert nach dem Satz von Lusin zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset [0,1]$, so dass $f|_K$ stetig ist und $\lambda([0,1] \setminus K) < \varepsilon$.
Sei $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{q_n\}$. Zeigen Sie, dass

$$K_k := [0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n - 2^{-(n+k)},\, q_n + 2^{-(n+k)})$$

für ausreichend großes k diese Bedingungen erfüllt.