Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel

WS 23/24

Analysis 3

Übungsblatt 6

Die Lösungen müssen in den entsprechenden Kasten im Studierendenraum 3. Stock MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 23.11., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1 (5 Punkte)**:** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und zusammenhängend und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in K$ gibt, so dass

$$\int_K f \, d\lambda = f(\xi)\lambda(K).$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Bildmenge $f(K)$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 2: Wir betrachten punktweise Konvergenz, punktweise Konvergenz fast überall, gleichmäßige Konvergenz, Konvergenz im Maß und L^1-Konvergenz.
Untersuchen Sie für jede Funktionenfolge $\{f_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, welcher der Konvergenzbegriffe zutrifft und geben Sie eine Grenzfunktion an.

(a) $f_{1,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{1,n}(x) = \max\{n(1 - |x - n|), 0\}$,

(b) $f_{2,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{2,n}(x) = \max\{1 - n|x - n|, 0\}$,

(c) $f_{3,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{3,n}(x) = \max\{\frac{1}{n}(1 - |x - n|), 0\}$,

(d) $f_{4,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{4,n}(x) = \max\{\sqrt{n} - n|x - n|, 0\}$.

Aufgabe 3: Seien $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbare Funktionen. Wahr oder falsch?

(a) Wenn $f \in L^1$ stetig ist und $\|f\|_{L^1} = 0$ gilt, so muss $f = 0$ gelten.

(b) Für $f_n, f \in L^1$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$.

(c) Wenn $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen ist, die gleichmäßig gegen f konvergiert, so ist auch der Limes f stetig.

(d) Es gibt eine Funktionenfolge $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ von L^1-Funktionen, welche gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in L^1$ konvergiert, aber nicht in L^1 gegen f konvergiert.

(e) $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann im Maß gegen die Nullfunktion, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(\left\{x : \sup_{k\geq n} |f_k(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**:** Sei $f \in L^1([0,1])$. Berechnen Sie

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 k \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{k^2}\right) dx$$

und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (1+2+3 Punkte)**:** Sei $f \in L^1([0,1],\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) $x^k f(x) \in L^1([0,1])$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 x^k f(x)dx = 0$.

(c) Falls $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$, dann

$$\lim_{k\to\infty} k \int_0^1 x^k f(x)dx = a.$$

Aufgabe 6 (3+1+2 Punkte)**:** Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}^+}$ definiert durch

$$f_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - n\left(x - \frac{1}{2}\right), & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{falls } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

(a) (f_n) eine Cauchyfolge bezüglich der $\|\cdot\|_{L^1([0,1])}$ ist, aber

(b) bezüglich dieser Norm keine stetige Funktion als Grenzwert hat.

(c) Begründen Sie, dass der Raum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit der L^1-norm, d.h. $\left(C([0,1]), \|\cdot\|_{L^1([0,1])}\right)$, nicht vollständig ist.

Aufgabe 7: Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum und $f_k, f : X \to \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{N}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbare Funktionen. Weiter sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ gilt:

$$f_k \to f \text{ nach dem Maß } \mu \text{ auf } A \subset X \;\Rightarrow\; \phi \circ f_k \to \phi \circ f \text{ nach dem Maß } \mu \text{ auf } A \subset X.$$

Zeigen Sie außerdem durch ein Gegenbeispiel, dass $\mu(A) < \infty$ eine notwendige Bedingung ist.