Prof. Dr. Guido Sweers **WS 23/24**
Dr. Aleksey Sikstel

Analysis 3

Übungsblatt 7

Die Lösungen müssen in den entsprechenden Kasten im Studierendenraum 3. Stock MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 30.11., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und konvex, $X \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $0 < \lambda(X) < \infty$ und $f : X \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie die Ungleichung

$$F\left(\frac{1}{\lambda(X)} \int_X f \, d\lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda(X)} \int_X F(f) \, d\lambda.$$

Hinweis: Eine mögliche Definition der Konvexität von F ist, dass es zu jedem $y \in \mathbb{R}$ ein $p \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass

$$F(x) \geq F(y) + p(x - y)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Weiterhin dürfen Sie verwenden, dass $F \circ f$ Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 2 (4+3 Punkte)**:** Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und f in $L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ λ-fast-überall.

(a) Seien weiterhin $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und g in $L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $g_k \to g$ λ-fast-überall gegeben, so dass $|f_k| \leq g_k$ λ-fast-überall und $\int_{\mathbb{R}^n} g_k d\lambda \to \int_{\mathbb{R}^n} g d\lambda$ gilt. Zeigen Sie, dass dann:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k d\lambda \to \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda.$$

Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von Fatou und Dreiecksungleichungen.

(b) Angenommen, dass $\int_{\mathbb{R}^n} |f_k| d\lambda \to \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda$ gilt. Zeigen Sie, dass dann für jede messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^n$:

$$\int_E f_k d\lambda \to \int_E f d\lambda.$$

Hinweis: Benutzen Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)**:** Wahr oder falsch?

(a) Es existiert eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen in $L^1(0, \infty)$ so dass $|f_n(x)| \leq 1$ für alle x und n, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle x und

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n d\lambda = 1.$$

(b) Es existiert eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen in $L^1(0,1)$ so dass $f_n \to 0$ punktweise, aber

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n d\lambda = \infty.$$

(c) Es existiert eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Funktionen auf $[0,1]$ so dass $f_n(x) \to f(x)$ für jedes $x \in [0,1]$, aber

$$\int_0^1 f_n d\lambda \not\to \int_0^1 f d\lambda.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)**:** Sei f eine nicht-negative Funktion auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: falls

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{n^2}{n^2+x^2} f(x) d\lambda \leq 1 \quad \forall n \geq 1,$$

dann $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\|f\|_1 \leq 1$.

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)**:** Berechnen Sie die folgenden Limiten und begründen Sie Ihre Antwort.

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\pi x} dx.$$

Hinweis: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$ für alle $x \geq 0$.

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(1 + x^{\frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2023)}}\right)^{-1} dx.$$

Aufgabe 6: Wir definieren die Funktionenfolge $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\delta_k \in L^1(\mathbb{R})$ durch

$$\delta_k(x) := \frac{1}{\pi} \frac{k}{k^2x^2+1}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}^+$ gilt $\delta_k \geq 0$.

(b) Für alle $k \in \mathbb{N}^+$ gilt $\int_R \delta_k \, dx = 1$.

(c) Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \delta_k \, dx = 0$.

(d) Für alle $f \in C_c(\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_k(x-y) f(y) \, dy = f(x).$$

Aufgabe 7: Zeigen Sie: Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar, so gilt λ-fast-überall in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = \lim_{n\to\infty} f(x-n) = 0.$$

Aufgabe 8: Finden Sie eine Folge von Funktionen $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = 2 \text{ und } \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x) \, dx = -2.$$