Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel **WS 23/24**

Analysis 3

Übungsblatt 8

Die Lösungen müssen in den entsprechenden Kasten im Studierendenraum 3. Stock MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 7.12., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1:

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig und uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar auf (a, b). Begründen Sie, dass dann $\int_{(a,b)} \max(f, 0) d\lambda = \infty$.

Aufgabe 2:

(a) Sei $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ mit $\lambda(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$.

(b) Gilt die Aussage auch für $\lambda(X) = \infty$? Finden Sie einen Beweis oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 3 (3+2 Punkte):

(a) Sie f messbar auf $[0, 1]$ und

$$g(p) := \|f\|_{L^p([0,1])} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

für $1 \le p < \infty$. Zeigen Sie, dass g monoton steigend ist.

(b) Sei ausserdem $f \notin L^\infty(0, 1)$. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{p\to\infty} g(p) = \infty$.

Aufgabe 4 (2+2+2+2 Punkte): Wahr oder falsch?

(a) Wenn $f \in L^p([0, 1])$ für alle $p \in (1, \infty)$, so auch $f \in L^\infty([0, 1])$.

(b) Sei $1 \le p < q < \infty$, dann gilt $L^q([1, \infty)) \subset L^p([1, \infty))$

(c) Sei $f_n \in L^1(0, 1) \cap L^2(0, 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $\|f_n\|_{L^1(0,1)} \to 0$, so auch $\|f_n\|_{L^2(0,1)} \to 0$.

(d) Sei $f_n \in L^1(0, 1) \cap L^2(0, 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $\|f_n\|_{L^2(0,1)} \to 0$, so auch $\|f_n\|_{L^1(0,1)} \to 0$.

Aufgabe 5:

(a) Sei $u \in C([a,b])$. Weiter gelte für alle $v \in C^1([a,b])$ mit $v(a) = 0 = v(b)$

$$\int_{[a,b]} uv' d\lambda = 0.$$

Zeigen Sie, dass u konstant ist: $u(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(y) dy$.

Hinweis: Finden Sie eine passende Funktion v, deren Ableitung v' der Funktion $u - c$ für eine passende Konstante c entspricht.

(b) Sei $V := \{u : \ u \in C^1([a,b]) \text{ mit } u(a) = 0 = u(b)\}$. Prüfen Sie, ob die folgende Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ein inneres Produkt auf V ist:

$$\langle u, v \rangle = \int_{[a,b]} (uv' + u'v + uv) d\lambda.$$

Aufgabe 6 (3 Punkte)**:** Fuer welche p und q aus $\mathbb{R}$ liegt $f(x) = \dfrac{|x|^q}{1 + |x|^2}$ in $L^p(\mathbb{R})$?

Aufgabe 7 (4 Punkte)**:** Zeigen Sie, dass $S := \{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) : \ n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem im $L^2(0,\pi)$ bildet, d.h. für alle $f, g \in S$ gilt

$$\int_0^\pi f g \, dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } f \neq g, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 8: Sei $D : \ C^1([0,1]) \to C([0,1])$ der Operator, der jeder Funktion $f \in C^1([0,1])$ ihre Ableitung $f' \in C([0,1])$ zuordnet, d.h. $Df = f'$.

(a) Zeigen Sie, dass $D : \ C^1([0,1]) \to C([0,1])$ stetig ist. Dabei seien $C([0,1])$ mit der Norm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

und $C^1([0,1])$ mt der Norm $\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ versehen.

(b) Bestimmen Sie

$$\sup_{f \in C^1([0,1]) f \neq 0} \frac{\|f'\|_\infty}{\|f\|_{C^1}}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_k(x) := \frac{1}{k} \sin(k\pi x)$.

(c) Zeigen Sie, dass $D : \ C^1([0,1]) \to C([0,1])$ nicht stetig ist, wenn man $C^1([0,1])$ ebenfalls mit der Supremumsnorm $\| \cdot \|_\infty$ versieht.