Prof. Dr. Guido Sweers
Dr. Aleksey Sikstel **WS 23/24**

Analysis 3

Übungsblatt 9

Die Lösungen müssen in den entsprechenden Kasten im Studierendenraum 3. Stock MI geworfen werden. Abgabeschluss ist Donnerstag, der 14.12., um 12:00 Uhr.
Schreiben Sie Name, Matrikelnummer und Gruppennummer gut sichtbar auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie mehrseitige Abgaben.

Aufgabe 1: Es sei

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } 0 < y < x, \\ -\frac{1}{y^2} & \text{für } 0 < x < y, \\ 0 & \text{für } x = y, xy = 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie, wenn möglich

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx \ \text{ und } \int_{[0,1]^2} f\, d\lambda.$$

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_\varepsilon(0)\cap[0,1]^2} f\, d\lambda \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_\varepsilon(0)\cap[0,1]^2} |f|\, d\lambda.$$

Aufgabe 2 (3+0 Punkte)**:** Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\int_E \sqrt{16x^2 + 9y^2} dxdy$ mit $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2/9 + y^2/16 < 1\}$.

(b) $\int_E x^2\, dxdydz$ mit $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 9x^2 + 4y^2 + z^2 < 36\}$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie für $s > 1$:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx,$$

wobei $\zeta(s) := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ die Riemann'sche Zetafunktion ist.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)**:**

(a) Sei K ein Kreiskegel mit einer Grundscheibe vom Radius $r > 0$ und Höhe $h > 0$. Berechnen Sie mit Cavalierischen Prinzips das Volumen von K.

(b) Sei $f : [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und $K \subset [a,b] \times \mathbb{R}^2$ der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den Graphen von f um die x-Achse rotier, d.h.

$$K = \{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 : \ y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Begründen Sie, warum $K \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ und, dass es gilt: $\lambda(K) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**:** Zeigen Sie, dass für das Volumen V eines Torus T mit Radien $0 \leq r \leq R$ gilt:

$$V = 2\pi^2 r^2 R.$$

Hinweis: Benutzen Sie "horizontale" Ringscheiben so wie in Abbildung 1.
Wieso füllen n runde "vertikale" Scheibchen mit Dicke $2\pi R/n$ den Torus nicht auf?

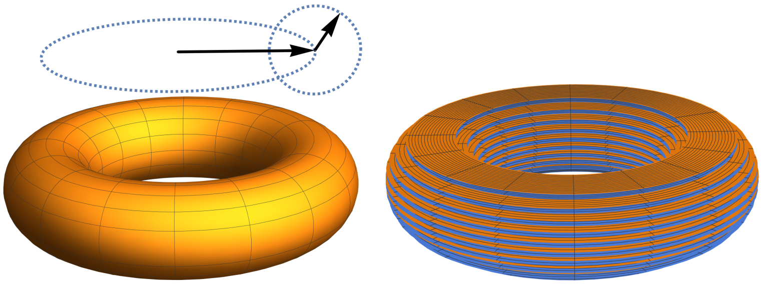

Abbildung 1: Links: Torus mit seinen Radien. Rechts: Ringscheiben.

Aufgabe 6 (3+4 Punkte)**:** Wir betrachten die Polarkoordinaten $\Phi : G \to \mathbb{R}^2$ mit $G = (0,\infty) \times (0, 2\pi)$ und

$$\Phi(r,\phi) = (r\cos\phi, \, r\sin\phi)).$$

(a) Berechnen Sie die Ableitung Φ', das Bild $D \subset \mathbb{R}^2$ von Φ und begründen Sie, warum Φ ein Diffeomorphismus ist. (Sie können annehmen, dass Φ injektiv ist).

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Polarkoordinaten die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy, \qquad \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

und zeigen Sie mit Hilfe des zweiten Integrals, dass

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Aufgabe 7: Das Trägheitsmoment eines Körpers $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit Massendichte ρ um die z-Achse ist

$$M_z := \int_\Omega (x^2 + y^2)\rho \, dxdydz.$$

Nehmen wir $\rho = 1$. Berechnen Sie dieses Trägheitsmoment von

(a) der Kugel $B_1(0) = \{(x,y,z) : \ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$,

(b) der verschobenen Kugel $B_1((1,0,0)) = \{(x,y,z) : \ (x-1)^2 + y^2 + z^2 < 1\}$,

(c) des Diabolos $D = \{(x,y,z) : \ x^2 + y^2 < z^2 + 1 < 10\}$.