Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **SS 2020**

Funktionalanalysis

Übungsblatt 0

Dieses Übungsblatt ist unbepunktet und muss nicht abgegeben werden.

Aufgabe 1: Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\int_{0<x<y<1} \frac{x^3-x}{y} d(x,y)$,

b) $\int_{x^2+y^2\leq 1} (3x^2+y^2+x)\, d(x,y)$.

Aufgabe 2: Wir berechnen das Volumen der Einheitskugel im n-dimensionalen euklidischen Raum $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} < 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

b) Berechnen Sie mithilfe von a) das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} dx$.

c) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1}) = n\mathrm{Vol}_n(B_1(0)),$$

wobei $\mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1})$ der Oberflächeninhalt der Einheitssphäre ist und $\mathrm{Vol}_n(B_1(0))$ das Volumen der Einheitskugel.
Hinweis: Verwenden Sie $\mathrm{Vol}_n(B_1(0)) = \int_{B_1(0)} 1dx$ und die Substitution $x = r\omega$ mit $r \in (0,1)$ und $\omega \in S^{n-1}$.

d) Verwenden Sie Aufgabenteil b) und c) um zu zeigen, dass

$$\mathrm{Vol}_n(B_1(0)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)},$$

wobei die Gamma Funktion definiert ist durch

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

und $\Gamma(z)z = \Gamma(z+1)$ für $z > 0$ erfüllt.

Aufgabe 3: Sei $b > 0$ und $v \in C([0,b])$ strikt positiv, also $\min_{x\in[0,b]} v(x) > 0$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Normen auf $C([0,b])$ äquivalent sind:

$$\|u\|_\infty := \sup_{x\in[0,b]} |u(x)|, \quad \|u\|_v := \sup_{x\in[0,b]} v(x)|u(x)| \text{ für } u \in C([0,b]).$$

Hinweis: Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent in X, wenn es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt, sodass

$$C_1\|u\|_1 \le \|u\|_2 \le C_2\|u\|_1 \text{ für alle } u \in X.$$

Aufgabe 4: Sei $X = C_b([0,\infty))$ der Raum der beschränkten stetigen Funktionen auf $[0,\infty)$ und $\|\cdot\|_\beta$ definiert durch

$$\|u\|_\beta = \sup_{x\in[0,\infty)} e^{\beta x}|u(x)| \text{ für } u \in C_b([0,\infty)).$$

a) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $(C_b([0,\infty)), \|\cdot\|_\beta)$ ein normierter Raum?

b) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent zu $\|\cdot\|_\beta$?

Aufgabe 5: Sei $p \in [1,\infty)$. Wir betrachten die folgenden unendlichdimensionalen normierten Räume:

$$\ell^p := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots);\ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\} \text{ mit der Norm } \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\ell^\infty := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots);\ \sup_{k\in\mathbb{N}^+} |x_k| < \infty \right\} \text{ mit der Norm } \|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}^+} |x_k|,$$

$$c_0 := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots);\ \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \right\} \text{ mit der Norm } \|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}^+} |x_k|.$$

a) Zeigen Sie, dass $\ell^p \subset c_0 \subset \ell^\infty$ für alle $1 \le p < \infty$.

b) Zeigen Sie, dass $\ell^p \not\subset \ell^q$ für $1 \le q < p \le \infty$.

c) Zeigen Sie, dass $c_0 \not\subset \ell^p$ für alle $1 \le p < \infty$.

d) Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$ auf ℓ^2 nicht äquivalent sind.

Aufgabe 6: Betrachten auf der Einheitskugel $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ den Raum der messbaren und quadratisch integrierbaren Funktionen $L^2(B_1(0))$. Zeigen Sie, dass $(L^2(B_1(0)), \|\cdot\|)$ mit

$$\|f\| = \int_{B_1(0)} |f(x)||x|^{-\frac{n}{3}} dx \text{ für } f \in L^2(\Omega)$$

ein normierter Raum ist. Hier gilt $f = g$ in $L^2(B_1(0))$, wenn $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in B_1(0)$.