Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

SS 2020

Funktionalanalysis

Übungsblatt 10

Die Lösungen müssen eingescannt über **Ilias** eingereicht werden. Abgabeschluss ist am Sonntag, den 05.07.2020, um 23:59 Uhr.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen und geben Sie jeweils die geometrische und algebraische Vielfachheit an.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: a) Betrachten Sie den Raum $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ und die beiden Teilräume

$$U_1 = \{u \in C[0,1]; u(0) = 0, u(1) = 0\} \text{ und } U_2 = \{u \in C[0,1]; u(0) = 0\}.$$

Sei $\theta \in (0,1)$. Gibt es ein $v \in U_2$, sodass $\|v\|_\infty = 1$ und $\inf_{u \in U_1} \|v - u\|_\infty = \theta$? Wenn ja, dann geben Sie eine solche Funktion v an.

b) Ändert sich daran etwas wenn wir U_1 und U_2 als Teilräume von $(L^2((0,1)), \|\cdot\|_2)$ auffassen?

Aufgabe 3: Betrachten Sie den Operator $K : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ gegeben durch

$$(Ku)(x) = x^2 u(0) + u(1).$$

Bestimmen Sie das Spektrum des Operators.

Aufgabe 4 (4+3 Punkte): Sei $\alpha \in c_0$ definiert durch

$$\alpha = (1, \underbrace{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}}_{\text{2 mal}}, \underbrace{\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}}_{\text{3 mal}}, \underbrace{\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}}_{\text{4 mal}}, \dots)$$

und $K : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ gegeben durch

$$(Kx)_k = \alpha_k x_k \text{ für } k \in \mathbb{N}^+.$$

Wir wissen bereits, dass der Operator kompakt und das Punktspektrum gegeben ist durch $\sigma_P(K) = \{\frac{1}{j}; j \in \mathbb{N}^+\}$.

a) Geben Sie die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda_j := \frac{1}{j}$ (mit $j \in \mathbb{N}^+$) an.

b) Geben Sie den Index n_{λ_j} sowie die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ_j an.

Aufgabe 5: Betrachten Sie den Operator $K : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ gegeben durch

$$(Ku)(x) = \int_0^x (1-x)u(t)dt + \int_x^1 (1-t)u(t)dt.$$

Zeigen Sie, dass der Operator kompakt ist und dass für $|\lambda| > \frac{1}{2}$ und $g \in C[0,1]$ die Gleichung $(\lambda I - K)u = g$ eine eindeutige Lösung $u \in C[0,1]$ besitzt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\|K\| = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 6 (5 Punkte): Betrachten Sie den Raum $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ und die Unterräume

$$c = \{x \in \ell^\infty;\ \lim_{k\to\infty} x_k \text{ existiert}\}, \quad \tilde{c} = \{x \in \ell^\infty;\ \lim_{k\to\infty} x_{2k} \text{ und } \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} \text{ existieren}\}.$$

Sei $\theta \in (0,1)$. Geben Sie ein $z \in \tilde{c}$ mit $\|z\|_\infty = 1$ an, sodass $\inf_{y\in c} \|z-y\|_\infty = \theta$.

Aufgabe 7: Geben Sie jeweils ein Beispiel für einen kompakten Operator $K : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ an, sodass

a) 0 kein Eigenwert von K ist,

b) 0 ist ein Eigenwert mit endlicher geometrischer Vielfachheit, d.h. $\dim(\ker(K)) < \infty$,

c) 0 ist ein Eigenwert mit unendlicher geometrischer Vielfachheit, d.h. $\dim(\ker(K)) = \infty$.

Aufgabe 8: Sei $f \in C[0,1]$ gegeben. Betrachten Sie den Operator $A : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ gegeben durch

$$(Au)(x) = f(x)u(x).$$

Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \sigma_P(A)$ das folgende gilt:

$$\dim(\ker(K - \lambda I)) = \infty.$$

Aufgabe 9: Sei $A : (L^2(0,1), \|\cdot\|_2) \to (L^2(0,1), \|\cdot\|_2)$ gegeben durch

$$(Af)(x) = \mathbb{1}_{[1/4,3/4]}(x)f(x) + (1 + x + 3x^2)\int_0^1 f(t)dt.$$

Ist der Operator kompakt?

Hinweis: Betrachten Sie den Eigenwert $\lambda = 1$ *und verwenden Sie Fredholm.*

Aufgabe 10 (8 Punkte): Betrachten Sie den Operator $K : (C[0,2\pi], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,2\pi], \|\cdot\|_\infty)$ gegeben durch

$$(Ku)(x) = \sin(x)\int_0^{2\pi} \cos(t)u(t)dt + \cos(x)\int_0^{2\pi} \sin(t)u(t)dt.$$

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $(K - \lambda I)u = f$ für jedes $f \in C[0,2\pi]$ lösbar?