Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

SS 2020

Funktionalanalysis

Übungsblatt 11

Die Lösungen müssen eingescannt über **Ilias** eingereicht werden. Abgabeschluss ist am Sonntag, den 12.07.2020, um 23:59 Uhr. Dies ist das **letzte** Übungsblatt.

Aufgabe 1 (7 Punkte): Wir betrachten die fette Cantormenge. Diese wird ähnlich zur Cantormenge definiert: Anstatt Intervalle der Länge $\frac{1}{3^n}$ entfernt man im n-ten Schritt in der Mitte ein offenes Intervall der Länge $\frac{1}{4^n}$. Also

$$\tilde{C}_0 = [0,1], \quad \tilde{C}_1 = \left[0, \tfrac{3}{8}\right] \cup \left[\tfrac{5}{8}, 1\right], \quad \tilde{C}_2 = \left[0, \tfrac{5}{32}\right] \cup \left[\tfrac{7}{32}, \tfrac{3}{8}\right] \cup \left[\tfrac{5}{8}, \tfrac{25}{32}\right] \cup \left[\tfrac{27}{32}, 1\right], \quad \ldots .$$

Man setzt $\tilde{C} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \tilde{C}_k$. Zeigen Sie, dass $\tilde{C} \in \mathcal{L}_1$ und bestimmen Sie $\lambda(\tilde{C})$.

Hinweis: Es darf verwendet werden, dass falls $A_n \in \mathcal{L}_1$, $A_{n+1} \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda(A_0) < \infty$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$.

Aufgabe 2: Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen schwach differenzierbar sind. Wenn ja, liegen sie in $W^{1,2}(-1,1)$?:

a) $u_1(x) = \max(0,x)x$,

b) $u_2(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$,

c) $u_3(x) = \operatorname{sign}(x)(1+x)$.

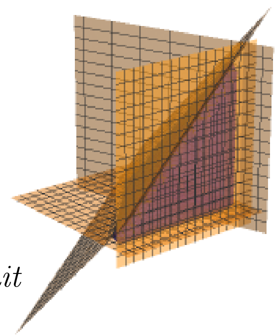
Aufgabe 3: a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet $p \in [1,\infty]$ und $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Für welche $q \in [1,\infty]$ gilt dann auch $f \in W^{1,q}(\Omega)$?

b) Wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ unbeschränkt ist, dann gilt das Ergebnis aus a) nicht mehr. Geben Sie dazu ein Gegenbeispiel an. Die Dimension $n \in \mathbb{N}^+$ können Sie selbst wählen.

c) Seien $f \in W^{1,p}(\Omega)$ und $g \in W^{1,q}(\Omega)$ mit $p,q \in (1,\infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. Zeigen Sie, dass dann $fg \in W^{1,\frac{pq}{p+q}}(\Omega)$.

Aufgabe 4: Berechnen Sie das Lebesgue-Maß der dreidimensionalen Menge, die durch die folgenden vier Flächen begrenzt wird:

$$\begin{aligned}
&\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\},\\
&\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\},\\
&\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - 3y = 6\},\\
&\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 8\}.
\end{aligned}$$



Hinweis: Zu berechnen ist das Integral über die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A$ mit $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x > 0,\ z > 0,\ x - 3y < 6,\ x + y + z < 8\}$.

Aufgabe 5: Sei $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f_n(x) = (1 - x^{4n})(e^x + e^{-n^2x^2}).$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge auf $[-1, 1]$ punktweise konvergiert.

b) Begründung Sie, warum $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)dx = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$ gilt und berechnen Sie dieses Integral.

Aufgabe 6 (5 Punkte): Sei $f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}^+$ gegeben durch

$$f_n(x) = |x|^{-1+\frac{1}{n}} e^{-x^{2n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n} x\right) \text{ für } x \neq 0$$

Überprüfen Sie, ob $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)dx < \infty$ gilt.

Aufgabe 7: Seien $f_k, u_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $k, m \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f_k(x) = \mathbb{1}_{[k,k+1]}(x) - \mathbb{1}_{[k+1,k+2]}(x) \text{ und } u_m(x) = \sum_{k=0}^{m} f_k(x).$$

Untersuchen Sie, ob $\lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_m(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{m\to\infty} u_m(x)dx$ erfüllt ist.

Aufgabe 8 (4+4 Punkte): Sei $\Omega = (-1, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$.

a) Wir definieren $u : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$u(x_1, x_2) = 1 - |x_1 x_2|.$$

Zeigen Sie, dass $u \in W^{1,p}(\Omega)$ für alle $p \in [1, \infty]$.

b) Sei $v : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$v(x_1, x_2) = \operatorname{sign}(x_1)x_2.$$

Überprüfen Sie, ob die schwachen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_1} v$, $\frac{\partial}{\partial x_2} v$ und $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} v$ existieren.

Aufgabe 9: Seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ x^2 & \text{für } x \in (0, 1), \\ c_1 x - c_2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Untersuchen Sie bis zu welcher Ordnung die Funktion schwach differenzierbar ist (in Abhängigkeit von $c_1$und c_2).