Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **SS 2020**

Funktionalanalysis

Übungsblatt 2

Die Lösungen müssen eingescannt über **Ilias** eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Sonntag, den 03.05.2020, um 23:59 Uhr.

Aufgabe 1 (4+2 Punkte)**:** Seien $x, y \in \mathbb{R}^\infty$ und

$$d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}.$$

a) Zeigen Sie, dass für eine Folge $\left\{x^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^\infty$ gilt

$$d(x^{(k)}, x) \to 0 \text{ für } k \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{für jedes } i \in \mathbb{N} \text{ gilt } x_i^{(k)} \to x_i \text{ für } k \to \infty.$$

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^\infty, d)$ ein Fréchet-Raum ist.

Aufgabe 2: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Wir nennen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ Lipschitz, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt, sodass $|f(x) - f(y)| \leq Ld(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Die Distanz von $x \in X$ zu M ist definiert durch

$$d(x, M) := \inf_{y\in M} d(x, y).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto d(x, M)$ Lipschitz mit Lipschitz-Konstante $L \leq 1$ ist. Zeigen Sie auch, dass für die minimale Lipschitz-Konstante $L = 1$ gilt, wenn $X \backslash \overline{M} \neq \emptyset$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**:** Sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ gegeben durch $f(x) = \arctan(x)$. Angenommen (X, d) ist ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass dann auch $(X, f \circ d)$ ein metrischer Raum ist.

Bemerkung: f kann hier auch eine beliebige stetig differenzierbare streng monoton steigende Funktion sein mit $f(0) = 0$ und f' monoton fallend.

Aufgabe 4: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Zeigen Sie:

a) Wenn (X, d) ein Fréchet-Raum ist und Y abgeschlossen, dann ist auch (Y, d) ein Fréchet-Raum.

b) Wenn (Y, d) ein Fréchet-Raum ist, dann ist Y abgeschlossen in X.

Hinweis: Eine Menge $Y \subset X$ heißt abgeschlossen, wenn für jede Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$, die in X konvergiert, der Grenzwert in Y liegt.

Aufgabe 5: Betrachten Sie den Raum $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$. Welche der folgenden Mengen sind kompakt?

a) $K_1 = \overline{B_1(0)}$,

b) $K_2 = \left\{x \in \ell^2; |x_i| \le \frac{1}{i^\alpha} \text{ für } i \in \mathbb{N}^+\right\}$ mit $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$,

c) $K_3 = \left\{x \in \ell^2; |x_i| \le \frac{1}{i} \text{ für } i \in \mathbb{N}^+\right\}$.

Aufgabe 6: Sei $p \in [1, \infty)$ und $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$. Wir betrachten für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = \|x\|^\alpha (1 - \|x\|^4)^\beta.$$

Welche Bedingungen für α und β müssen erfüllt sein, damit $f \in L^p(B_1(0))$?

Aufgabe 7: Seien $(V_1, \|\cdot\|_1)$ und $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normierte reelle Vektorräume, $x \in V_1$ und $A : V_1 \to V_2$ linear. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$A \text{ ist stetig in } x \Leftrightarrow A \text{ ist stetig.}$$

Aufgabe 8: Seien $(V_1, \|\cdot\|_1)$ und $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normierte reelle Vektorräume. Zeigen Sie, dass wenn V_1 endlich dimensional ist, dann ist jede lineare Abbildung $A : V_1 \to V_2$ auch beschränkt.

Aufgabe 9 (3+3+3 Punkte)**:** Sind die folgenden Operatoren linear und beschränkt? Wenn ja, berechnen Sie auch die Operatornorm.

a) $A_1 : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ gegeben durch $(A_1 u)(x) = x^5 u(0)$,

b) $A_2 : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegeben durch $A_2 u = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} u(x) dx$.

c) $A_3 : (C([0,1]), \|\cdot\|) \to (C([0,1]), \|\cdot\|)$ gegeben durch $(A_3 f)(x) = f(1-x)$, wobei $\|\cdot\|$ wei folgt definiert ist:

$$\|f\| = \int_0^1 x^2 |f(x)| dx \qquad \text{für } f \in C([0,1]).$$

Aufgabe 10: Betrachten Sie $\{e^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^\infty$ wobei

$$e_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k, \\ 0 & \text{falls } i \neq k. \end{cases}$$

Für welche der folgenden Räume ist dies eine Schauderbasis?

a) $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ mit $p \in (1, \infty)$ b) $(c, \|\cdot\|_\infty)$ c) $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.