Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc.

SS 2020

Funktionalanalysis

Übungsblatt 3

Die Lösungen müssen eingescannt über **Ilias** eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Sonntag, den 10.05.2020, um 23:59 Uhr.

Aufgabe 1: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $x_0 \in V$. Zeigen Sie, dass falls $\phi(x_0) = 0$ für alle stetigen linearen Abbildungen, dann gilt $x_0 = 0$.

Aufgabe 2 (4+4+4 Punkte)**:** Wir definieren

$$\mathcal{P} := \{\text{Polynome bis zum Grad zwei}\}.$$

Wir betrachten $\mathcal{P}$ als Teilraum von $(C([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Sei $A : (\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegeben durch

$$A(p) = p'(1).$$

a) Zeigen Sie, dass A eine lineare und stetige Abbildung ist.
Hinweis: Stellen Sie $p'(1)$ mithilfe von $p(-1), p(0)$ und $p(1)$ dar.

b) Berechnen Sie die Operatornorm von A.

c) Finden Sie eine normerhaltende Fortsetzung von A auf $(C([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$, d.h. suche ein stetiges und lineares Funktional $\tilde{A} : (C([-1,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ mit $\tilde{A}(p) = A(p)$ für $p \in \mathcal{P}$ und $\|\tilde{A}\|_{C([-1,1])\to\mathbb{R}} = \|A\|_{\mathcal{P}\to\mathbb{R}}$.

Aufgabe 3: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Vektorraum. Seien A, B nichtleere, konvexe und disjunkte Teilmengen von V.

a) Zeigen Sie, dass das Innere von A, bezeichnet als A°, ebenfalls konvex ist.

b) Zeigen Sie, dass wenn $a_1 \in A$ and $a_2 \in A^\circ$, dann gilt auch

$$\theta a_1 + (1-\theta)a_2 \in A^\circ \text{ für alle } \theta \in [0,1).$$

c) Beweisen Sie mithilfe des Trennungssatzes von Hahn-Banach, dass wenn $A^\circ \neq \emptyset$, dann gilt

$$A \subset \overline{A^\circ}.$$

Hinweis: Nehmen Sie an, dass es ein $x \in A$ gibt mit $x \notin \overline{A^\circ}$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $B_\delta(x) \cap \overline{A^\circ} = \emptyset$. Wenden Sie den Trennungssatz an und führen Sie dies zu einem Widerspruch.

Aufgabe 4: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Vektorraum. Seien $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ linear unabhängig und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es dann ein lineares und stetiges Funktional $\phi : V \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $\phi v_i = \alpha_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 5: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $v \in V$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\begin{aligned}\|v\| &= \sup\{|\phi(v)|; \phi : V \to \mathbb{R} \text{ linear und beschränkt }, \|\phi\| \leq 1\} \\ &= \max\{|\phi(v)|; \phi : V \to \mathbb{R} \text{ linear und beschränkt }, \|\phi\| \leq 1\}.\end{aligned}$$

Aufgabe 6: Sei $a \geq 0$ und $U_a \subset \mathbb{R}^2$ der folgende Untervektorraum

$$U_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax - y = 0\}.$$

Seien $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_1$ die beiden Normen auf $\mathbb{R}^2$, definiert durch $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$.

a) Sei $f : (U_a, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegeben durch $f(x,y) = x$. Bestimmen Sie die Operatornorm $\|f\|_{U_a \to \mathbb{R}}$ in Abhängigkeit von a.

b) Seien $c, d \in \mathbb{R}$ mit $(c,d) \neq (0,0)$ und $\phi : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegeben durch $\phi(x,y) = cx + dy$. Zeigen Sie, dass

$$\|\phi\|_{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}} = \sqrt{c^2 + d^2}.$$

c) Nach dem Theorem über die Funktionalerweiterung existiert eine stetige lineare Abbildung $\tilde{f} : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ mit $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$ für $(x,y) \in U_a$ und $\|\tilde{f}\|_{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}} = \|f\|_{U_a \to \mathbb{R}}$. Geben Sie für $a = 0$ und $a = 2$ eine solche Erweiterung explizit an. Ist diese eindeutig?

d) Betrachten Sie nun $f : (U_0, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ gegeben durch $f(x,y) = x$. Zeigen Sie, dass es unendlich viele stetige lineare Erweiterungen $\tilde{f} : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ von f gibt mit $\|\tilde{f}\|_{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}} = \|f\|_{U_0 \to \mathbb{R}}$.

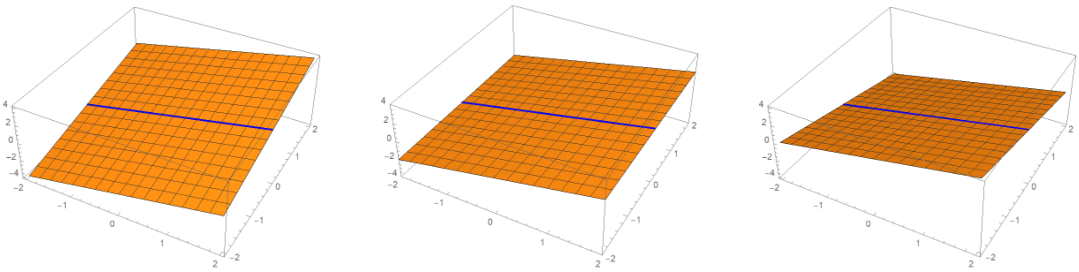

Abbildung 1: Mögliche Erweiterungen von $f(x,y) = x$.

Aufgabe 7 (4+4 Punkte): Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum.

a) Zeigen Sie, dass dann folgende Äquivalenz gilt:

$$U \subset V \text{ ist dicht}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{Für alle stetigen und linearen Abbildungen } \phi : V \to \mathbb{R} \text{ mit } \phi_{|U} = 0 \text{ gilt } \phi = 0.$$

Hinweis: Nehmen Sie für $\Leftarrow$ an, dass $U \subset V$ nicht dicht ist (d.h. es existiert ein $v_0 \in V \backslash \overline{U}$) und führen Sie dies unter Verwendung der geometrischen Version des Satzes von Hahn-Banach zu einem Widerspruch.

b) Sei $U \subset V$ ein abgeschlossener Unterraum. Zeigen Sie, dass falls es ein $v_0 \notin U$ gibt, dann existiert eine stetige lineare Abbildung $\phi : V \to \mathbb{R}$ mit $\phi(v_0) = 1$ und $\phi_{|U} = 0$.