Prof. Dr. Guido Sweers **SS 2020**
Inka Schnieders, M.Sc.

Funktionalanalysis

Übungsblatt 4

Die Lösungen müssen eingescannt über **Ilias** eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Sonntag, den 17.05.2020, um 23:59 Uhr.

Aufgabe 1: Wir zeigen, dass der Dualraum von $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ mit $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ identifiziert werden kann.

a) Sei $y \in \ell^1 \backslash \{0\}$ und definiere $F_y : (c_0, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ durch
$$F_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k.$$
Zeigen Sie, dass F_y linear und beschränkt ist und beweisen Sie, dass $\|F_y\|_{(c_0)^*} = \|y\|_1$.

b) Sei nun $F \in (c_0)^*$ beliebig. Zeigen Sie, dass es ein $y \in \ell^1$ gibt, sodass $F = F_y$.

Hinweis: Man kann jedes $x \in c_0$ mithilfe der Einheitsvektoren schreiben als $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$. Verwendet man die Linearität und Stetigkeit von F, folgt $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k F(e_k)$. Zeigen Sie, dass $(F(e_1), F(e_2), \dots) \in \ell^1$.

Aufgabe 2 (6 Punkte): Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $\|\cdot\|_H$ die durch das innere Produkt induzierte Norm. Zeigen Sie, dass für jede Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ die folgende Äquivalenz erfüllt ist:

$$x_k \to x \text{ für } k \to \infty \text{ in H im starken Sinne}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x_k \rightharpoonup x \text{ in H und } \|x_k\|_H \to \|x\|_H \text{ für } k \to \infty.$$

Aufgabe 3: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie:

a) Sei $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V^*$ und $\phi \in V^*$. Wenn $\phi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \phi$ in V^* für $k \to \infty$, dann gilt
$$\|\phi\|_* \leq \liminf_{k\to\infty} \|\phi_k\|_*.$$
Hinweis: Begründen Sie, dass $|\phi_k(v)| \to |\phi(v)|$ für alle $v \in V$ und $|\phi(v)| \leq \|\phi_k\|_* \|v\|$.

b) Sei $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ und $v \in V$. Wenn $v_k \rightharpoonup v$ in V für $k \to \infty$, dann gilt
$$\|v\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|v_k\|.$$
Hinweis: Verwenden Sie ähnliche Begründungen wie in Aufgabenteil a) und die Existenz eines $\phi_0 \in V^*$ mit $\|\phi_0\|_* = 1$ und $\phi_0(v) = \|v\|$.

Aufgabe 4: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reflexiver Banachraum und $U \subset V$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Zeigen Sie, dass dann auch $(U, \|\cdot\|)$ ein reflexiver Banachraum ist.

Aufgabe 5 (7 Punkte)**:** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $F : V \to V$ linear und beschränkt. Zeigen Sie, dass wenn die Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ in V schwach gegen $v \in V$ konvergiert, dann konvergiert auch $\{F(v_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ schwach in V gegen $F(v)$.

Aufgabe 6: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wir betrachten den Hilbertraum $(L^2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ mit

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

und $\|\cdot\|_2$ sei die durch das innere Produkt induzierte Norm. Sei $h \in L^2(\Omega)$ mit $\|h\|_2 = 1$ und $V = \mathrm{Span}(h)$. Geben Sie die Formel für die Projektion $P_V : L^2(\Omega) \to V$ an.

Aufgabe 7: Wir betrachten den Hilbertraum $(L^2(0,1), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ wie in Aufgabe 6. Sei außerdem der abgeschlossene Unterraum $V \subset L^2(0,1)$ gegeben durch

$$V = \{u \in L^2(0,1); u(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \text{ mit } c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Bestimmen Sie für $h(x) = x^3$ die Projektion $P_V(h) \in V$.

Aufgabe 8 (7 Punkte)**:** Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum und $\{v_1, v_2, v_3\} \subset H$ mit $\|v_k\| = 1$ für alle $k \in \{1,2,3\}$ und $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ für alle $i, j \in \{1,2,3\}$ mit $i \neq j$. Sei außerdem $y \in H$ mit $y \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$. Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left\| y - \sum_{k=1}^{3} x_k v_k \right\|.$$

Geben Sie einen Punkt $z \in \mathbb{R}^3$ an, sodass $f(z) = \min_{x\in\mathbb{R}^3} f(x)$.

Aufgabe 9:

a) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Zeigen Sie, dass jede konvexe und abgeschlossene Teilmenge $U \subset V$ schwach abgeschlossen ist, d.h. für jede in V schwach konvergente Folge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset U$ liegt der schwache Grenzwert in U.
Hinweis: Verwenden Sie den Trennungssatz von Hahn-Banach.

b) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reflexiver Banachraum und $U \subset V$ konvex, abgeschlossen und beschränkt. Zeigen Sie, dass U schwach folgenkompakt ist.

c) Zeigen Sie, dass man in a) und b) nicht auf die Konvexität verzichten kann.
Hinweis: Betrachten Sie $U = \{x \in \ell^2; \|x\|_2 = 1\} \subset \ell^2$ und finden Sie eine schwach konvergente Teilfolge, sodass der schwache Grenzwert nicht in ℓ^2 liegt.