Prof. Dr. Guido Sweers
Inka Schnieders, M.Sc. **SS 2020**

Funktionalanalysis

Übungsblatt 5

Die Lösungen müssen eingescannt über **Ilias** eingereicht werden. Sollten dabei Probleme auftreten melden Sie sich bei Inka Schnieders. Abgabeschluss ist am Sonntag, den 24.05.2020, um 23:59 Uhr.

Aufgabe 1: Die Legendre-Polynome sind definiert durch

$$P_n(x) := \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass wenn man den Gram-Schmidt-Algorithmus auf die Menge

$$\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\} \subset (L^2(-1,1), \langle\cdot,\cdot\rangle)$$

anwendet, dann findet man die orthonormale Menge $E = \{P_0, P_1, P_2, \dots\}$, wobei P_n die Legendre-Polynome sind. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Vergewissern Sie sich, dass $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und dass P_n ein Polynom von Grad n ist.

b) Zeigen Sie, dass für $0 \leq m < n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{-1}^{1} x^m \left(\tfrac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n dx = 0.$$

c) Folgern Sie, dass dann auch $\langle P_m, P_n\rangle = 0$ für $m < n$.

d) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-1}^{1} \left(\tfrac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n \left(\tfrac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$$

und damit $\langle P_n, P_n\rangle = 1$.

Aufgabe 2 (6+6 Punkte): Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum, $S = \{e_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ eine linear unabhängige Teilmenge von H mit $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ und $H = \overline{\operatorname{Span}(S)}$. Zeigen Sie:

a) Es gilt für alle $x, y \in H$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle.$$

b) H ist isometrisch isomorph zu ℓ^2, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung $F : H \to \ell^2$ mit $\|F(x)\|_{\ell^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle} =: \|x\|_H$ für alle $x \in \ell^2$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**:** Sei $B_1(0)$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ und $f \in L^2(B_1(0))$. Gibt es eine Funktion $u \in L^2(B_1(0))$, sodass für alle $v \in L^2(B_1(0))$

$$\left(\int_{B_1(0)} |x|^{-\frac{2n-1}{4}} u(x)dx\right)\left(\int_{B_1(0)} |x|^{-\frac{2n-1}{4}} v(x)dx\right) + 2\int_{B_1(0)} u(x)v(x)dx = \int_{B_1(0)} f(x)v(x)dx\,?$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Lax-Milgram.

Aufgabe 4: Finden Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass das folgende Integral den minimalen Wert annimmt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x + a + b\sin(x) + c\cos(x)|^2\, dx.$$

Aufgabe 5: Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum und $B : H \times H \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform ($u \mapsto B(u, v)$ ist linear für alle $v \in H$ und $v \mapsto B(u, v)$ ist linear für alle $u \in H$). Zeigen Sie die folgende Äquivqlenz:

$$\text{Es gibt ein } C > 0 \text{ mit } |B(u,v)| \leq C\|u\|\|v\| \text{ für alle } u, v \in H$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{Falls } u_n \to u \text{ und } v_n \to v \text{ in } H \text{ für } n \to \infty, \text{ gilt auch } B(u_n, v_n) \to B(u, v).$$

Aufgabe 6: Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum $f \in H$ und $B : H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform, die außerdem strikt positiv definit und symmetrisch ist. Sei $F : H \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(v) = \frac{1}{2}B(v,v) - \langle f, v\rangle.$$

a) Zeigen Sie, dass das Funktional F nach unten beschränkt ist, d.h. es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ sodass $F(v) \geq C$ für alle $v \in H$.

b) Aus a) folgt, dass es eine minimierende Folge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ gibt. Also

$$C \leq \inf_{v\in H} F(v) = \lim_{k\to\infty} F(v_k).$$

Zeigen Sie, dass diese Folge eine Cauchy-Folge ist.
Hinweis: Zeigen und verwenden Sie, dass folgendes gilt:

$$B(v_n - v_m, v_n - v_m) = 4F(v_n) + 4F(v_m) - 8F\left(\frac{v_n + v_m}{2}\right) \text{ für } m, n \in \mathbb{N}.$$

c) Folgern Sie aus b), dass es ein $u_{\min} \in H$ gibt mit $F(u_{\min}) = \inf_{v\in H} F(v)$.

d) Zeigen Sie, dass das Minimum aus c) eine Lösung von der folgenden Gleichung ist

$$B(u_{\min}, v) = \langle f, v\rangle \text{ für alle } v \in H.$$

Verwenden Sie dafür die Ungleichung

$$F(u_{\min}) \leq F(u_{\min} + tv) \text{ für alle } t \geq 0, v \in H.$$

e) Seien u_1 und u_2 zwei Minimierer von F. Begründen Sie mit der strikten positiv-Definitheit von B, dass dann $u_1 = u_2$ gelten muss. Damit haben wir gezeigt, dass das Minimum eindeutig ist.